Die Berechnung der Gravitation eines kugelförmigen Körpers und einer runden Fläche

ausgearbeitet von: Dpl. Ing. Matthias Krause Kirchzarten, den 23.3.2005 (letzte Änderung 30.6.2005)
Copyright: Alle Rechte bleiben allein dem Verfasser vorbehalten

Zielsetzung

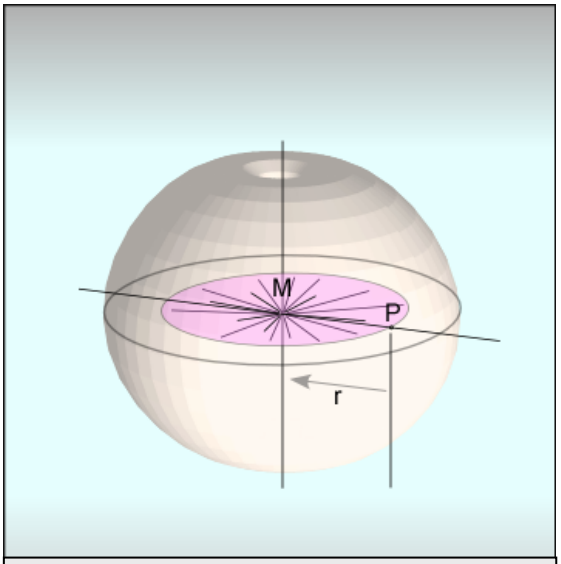
Dieser Aufsatz soll zwei unterschiedliche Berechnungsmöglichkeiten des Gravitationsfeldes in und um kugelförmige Körper betrachten. Die Ergebnisse werden an entsprechenden Beispielen verglichen und diskutiert. In einem zweiten Teil erfolgt anschließend die Ableitung des Gravitationsfeldes für die flächenhafte Ausdehnung von Massen.

Die graphischen Darstellungen mit ihren Ergebnissen, die in diesem Aufsatz Verwendung finden, werden aus einer Modell-Exceldatei entnommen, mit deren Hilfe eine diskrete Berechnung der Gravitation durchgeführt werden kann.

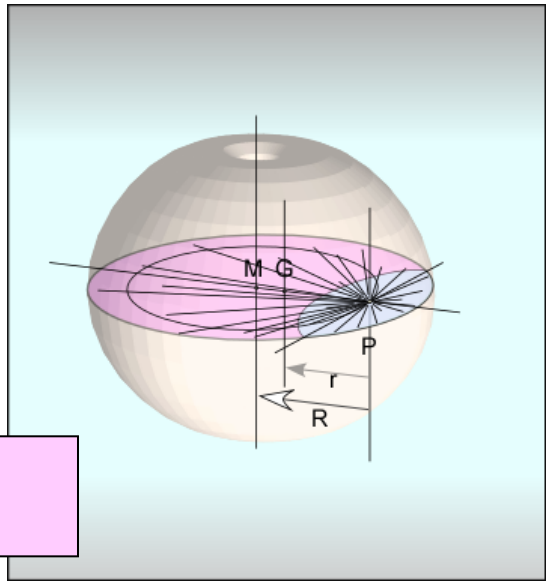
1. Grundlegendes zur Berechnung

Es gibt zwei Möglichkeiten, eine Gravitationsberechnung in und um einem kugelförmigen Körper durchzuführen.

1.1 Die **zentrumsbezogene, integrale Rechenweise**, die nur mit den Innenmassen arbeitet. (Derzeit am häufigsten verwendete Berechnungsmethode.) Zur Berechnung werden in der Ableitung nur die Massen, die innerhalb der visuellen Bahn des betrachteten Massepunktes um das galaktische Zentrum liegen, betrachtet. Die Ableitung der Gravitation für kugelförmige Körper wird unter Punkt 2 in aller Ausführlichkeit nachvollzogen.



Graphik 1
Die zentrumsbezogene integrale Rechenweise



Graphik 2
Die diskrete, meßpunktbezogene Rechenweise

1.2 Die **diskrete, meßpunktbezogene Berechnung** wird durch zahlreiche Einzelberechnungen mit einer Modelldatei realisiert, in der die Massen gerastert sind. In der gleichen Datei werden die Einzelberechnungen dann zusammengefasst und in die jeweiligen Parameter umgerechnet. Verwendet werden in diesem Modell alle! Einzelmassen der gerasterten Kugel, sowohl die Innen- als auch die Außenmassen der galaktischen Kugel bzw. Fläche. Zur Berechnung werden alle gravitativ relevanten Größen berücksichtigt.

Betrachtet werden die beiden unterschiedlichen Berechnungsmöglichkeiten und die Ergebnisse derselben. Die diskrete Berechnung erfolgt an einem galaktischen Kugel- und Flächenmodell, das rotationssymmetrisch aufgebaut ist und insgesamt 5056 Massenpunkte für die Kugel bzw. 357 für die Fläche enthält. Vom Zentrum ausgehend gibt es 10 Messpunkte bis zum Rand. Es wird erwartet, dass beide Modelle vergleichbare Ergebnisse liefern. Eine gewisse Abweichung zwischen den Ergebnissen wird durch die diskrete Ausrechnung (Rasterung) erwartet, diese Abweichung sollte sich aber deutlich im unteren einstelligen Prozentbereich (ca.1%) als Toleranz befinden.

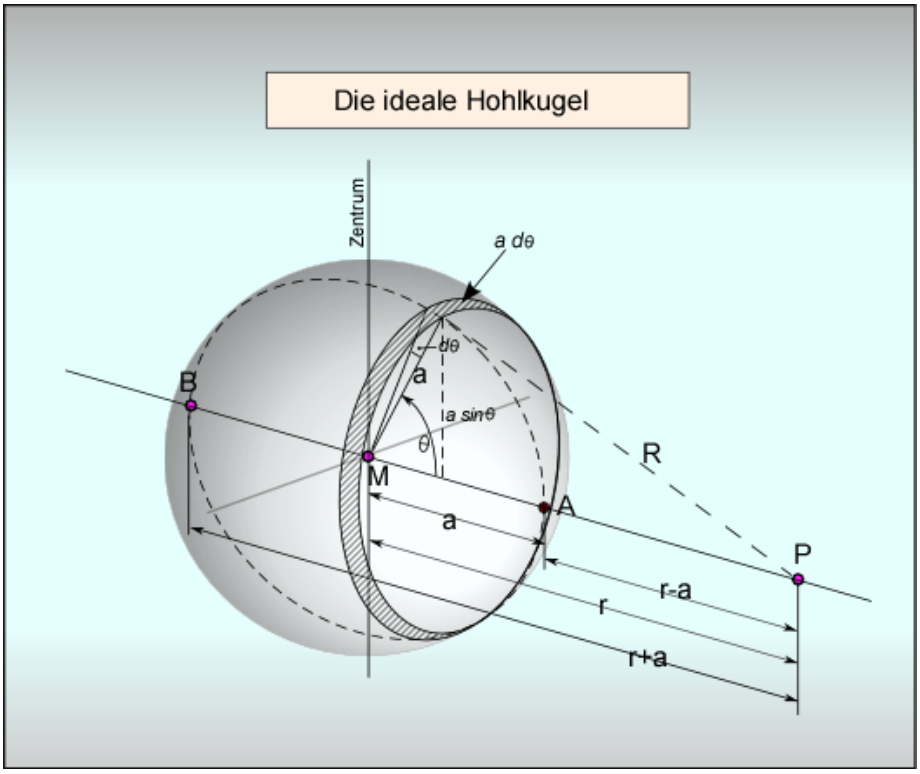
2. Die Ableitung der Gravitation in der zentrumsbezogenen, integralen Rechenweise nach „Alonso & Finn“ [1]

Diese Ableitung ist eines der Standardwerke zu diesem Thema, die wohl jeder Student der Physik verinnerlicht hat. Es wird an dieser Stelle die Ableitung möglichst sinngemäß, aber mit eigenen Worten wiedergegeben :

Alle Formeln, die die Gravitation betreffen, gelten genau genommen stets für Punktmassen. In der Berechnung des Laufes der Planeten um die Sonne sind die Abmessungen der kugelförmigen Körper im Verhältnis zu ihrem Abstand vernachlässigbar klein. Sie können deshalb als Punktmassen gelten. Nähert man sich aber einer kugelförmigen Masse, so ist zu untersuchen, ob die bisher für Punktmassen verwendeten Formeln auch für voluminöse Körper bei kurzer Distanz gelten. Selbst Newton war sich wegen dieser Fragen nicht sicher und verschob seine Veröffentlichungen über die Gravitation um bald zwei Jahrzehnte. Erst als er eine Erklärung gefunden hatte, veröffentlichte er sein Werk. Die Anziehungskraft zwischen den Massen wird berechnet mit der Formel

$$F = \frac{\gamma \cdot m \cdot M}{r^2} \qquad \textbf{(F 1)}$$

Es soll das Gravitationsfeld einer Kugeloberfläche mit gleichmäßiger Massenverteilung untersucht werden. Diese Kugel ist innen leer. Es wird zuerst eine außerhalb liegende Masse P betrachtet.



Graphik 2 *Berechnung des Gravitationsfeldes für einen Punkt, der sich außerhalb einer Masse befindet, die gleichmäßig über eine Kugeloberfläche der Hohlkugel verteilt ist.*

[1] Ableitung stark angelehnt an die Themenbehandlung im 1. Teil der Reihe „Fundamental University Physics“ von Alonso & Finn
Deutsche Fassung: M. Alonso/ E.J.Finn, Physik 3. Auflage (2000) Oldenboerg Verlag /S. 318 ff Die Gravitation eines kugelförmigen Körpers

Zur Kräfteberechnung unterteilen wir die Kugeloberfläche in kreisförmige schmale Streifen, die alle ihren Mittelpunkt auf der Linie AB haben. Der Radius eines jeden Streifens ist $R = a \cdot \sin\theta$ und die Breite ist $ad\theta$. Die Oberfläche eines jeden Streifens ist Länge x Breite =

$$(2\pi a \sin\theta)\cdot(ad\theta) = 2\pi a^2 \cdot \sin\theta d\theta .$$

Wenn *m* die Gesamtmasse der Kugel ist, dann ist die Masse per Oberflächeneinheit $\frac{m}{4\pi a^2}$ und die Masse eines Streifens ist dann $\frac{m}{4\pi a^2}\cdot\left(2\pi a^2 \cdot \sin\theta \cdot d\theta\right) = \frac{1}{2}\cdot m \cdot \sin\theta \cdot d\theta$

Alle Punkte des Streifens haben den gleichen Abstand R von P. Das gravitative Potential eines Steifens, der auf P wirkt ist dann

$$dV = -\frac{\gamma\left(\frac{1}{2}m \cdot \sin\theta \cdot d\theta\right)}{R} = -\frac{\gamma \cdot m}{2R}\cdot \sin\theta \cdot d\theta \qquad \textbf{(F1.1)}$$

Aus Graphik 2 folgt, dass $R^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cdot \cos\theta_0$. Durch differenzieren folgt hieraus, daß ***a*** und ***r*** konstant sind.

$$2R \cdot dR = 2ar \cdot \sin\theta \cdot d\theta \rightarrow \sin\theta \cdot d\theta = \frac{R \cdot dR}{a \cdot r}$$

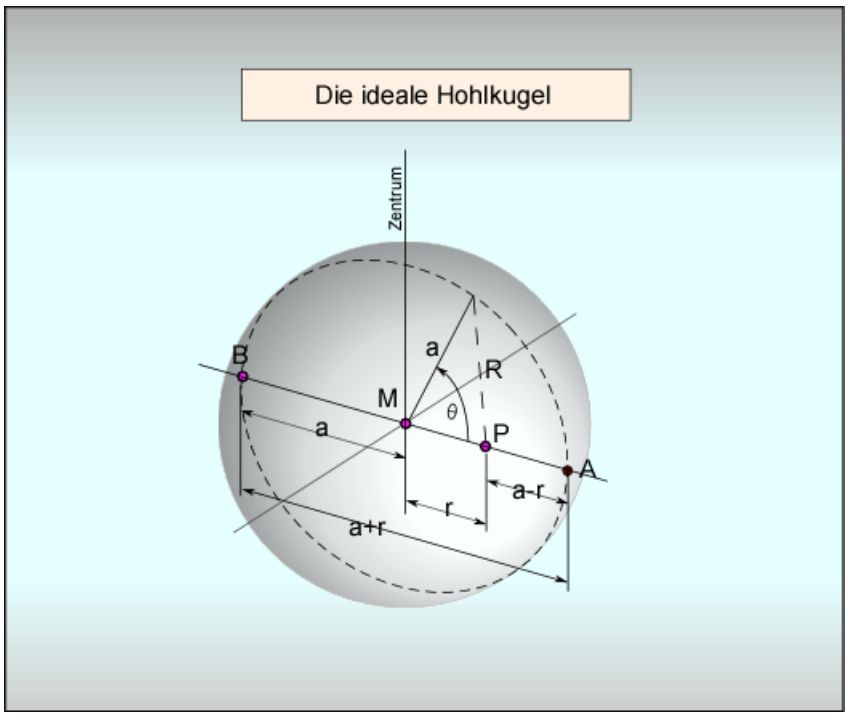
Dadurch können wir im Vergleich zu *dV* ersetzen, und wir bekommen

$$dV = -\frac{\gamma \cdot m}{2ar}\cdot dR \qquad \textbf{(F2)}$$

Um das ganze Potential der Kugeloberfläche zu bekommen, müssen wir integrieren, wobei die Grenzen für ***R*** durch ***r + a*** und ***r - a*** festgelegt sind.

$$V = -\frac{\gamma \cdot m}{2ar}\int_{r-a}^{r+a} dR = -\frac{\gamma \cdot m}{2ar}(2r) = -\frac{\gamma \cdot m}{r} \qquad \text{Für } r > a \qquad \textbf{(F3)}$$

Für eine innenliegende Masse wird die Gravitation wie folgt abgeleitet



Graphik 3 *Berechnung des Gravitationsfeldes für einen Punkt innerhalb einer Masse, die gleichmäßig über eine Oberfläche verteilt ist.*

Wenn P innerhalb der Kugel mit Abstand R, also zwischen den Grenzen von $a + r$ und $a - r$ für R liegt, so wird der Wert für das Potential

$$V = -\frac{\gamma \cdot m}{2ar}\int_{a-r}^{a+r} dR = -\frac{\gamma \cdot m}{2ar}(2r) = -\frac{\gamma \cdot m}{a} \qquad \text{Für} \quad r < a \qquad \textbf{(F4)}$$

Bzw. wir erhalten einen konstanten Wert, der unabhängig von der Lage von P ist. Durch Anpassen von Formel (F1) finden wir für die Feldstärke, die auf Punkte wirkt, die außerhalb der Kugeloberfläche liegen

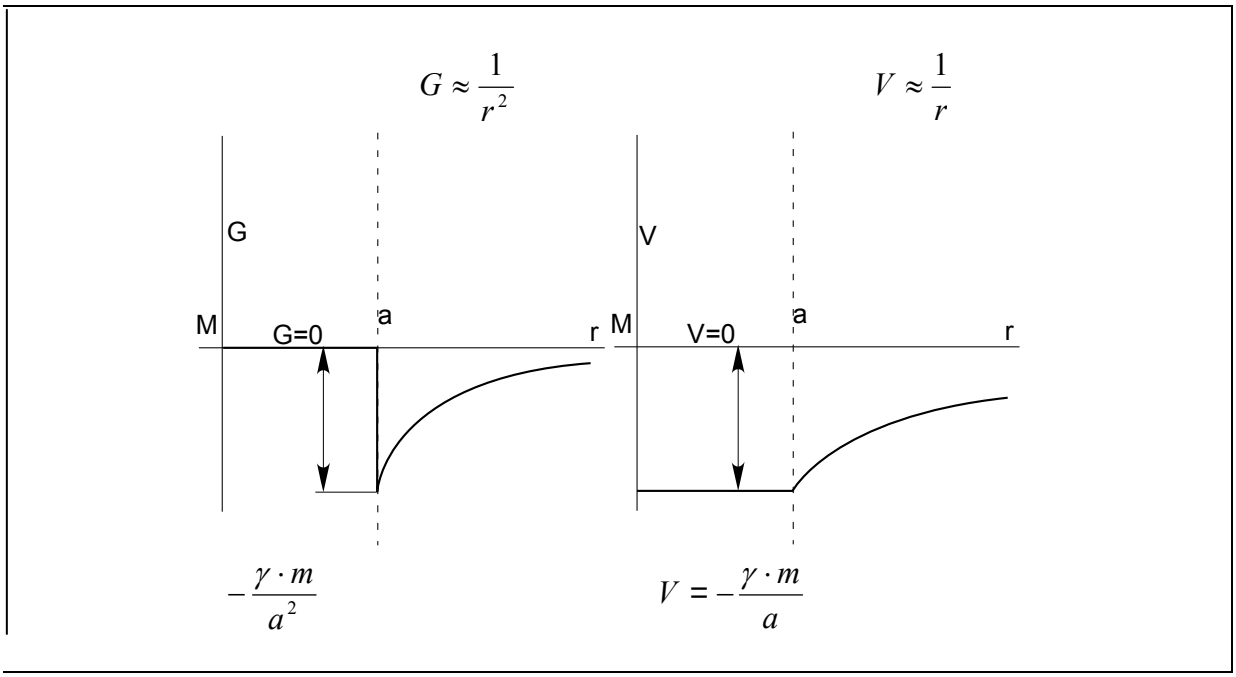
$$G = -\frac{\gamma \cdot m}{r^2} e_r \qquad \text{Für} \quad r > a \qquad \textbf{(F5)}$$

Und für Punkte die innerhalb der Kugeloberfläche liegen

$$G = 0 \qquad \text{Für} \quad r < a \qquad \textbf{(F6)}$$

Wenn wir die Formeln (F3) und (F5) mit den entsprechenden Formeln für die Flächenberechnung vergleichen, kommen wir zu folgender Zusammenfassung:

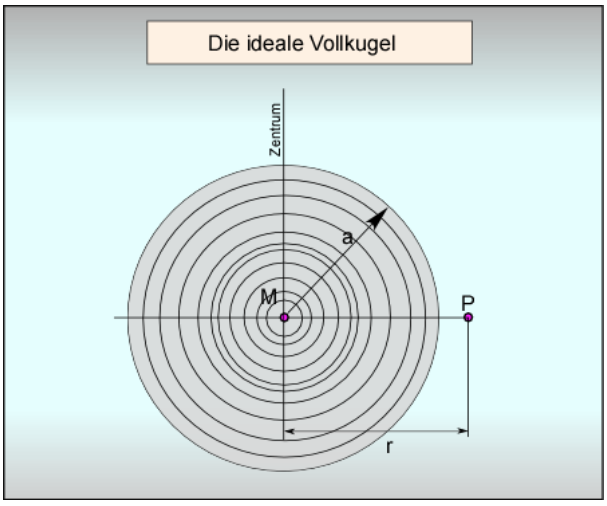
Die Feldstärke und die Energie zeigt für Punkte außerhalb einer Masse, die gleichmäßig über eine Kugeloberfläche verteilt ist, die gleiche Feldstärke und ein gleich hohes Potential auch dann an, wenn man die gleiche Masse im Mittelpunkt der Kugel platzieren würde. Für alle Punkte innerhalb der Hohlkugel ist die Feldstärke gleich Null und die Energie ist konstant.



Graphik 4 *Veränderung von G und V als Funktion des Abstandes zum Mittelpunkt für eine Masse, die gleichmäßig über eine Kugeloberfläche verteilt ist.*

Nach der Hohlkugelberechnung wird nun eine Vollkugel auf ihr gravitatives Verhalten hin untersucht.

Die Graphik 4 zeigt die Veränderung von G und V als Funktion des Abstandes zum Mittelpunkt der Kugel. Geht man, aus dem Unendlichen kommend, von außen zum Mittelpunkt, so verändert sich das Potential beim Passieren der Kugelschale nicht (Die Steigung verändert sich wohl ungleichmäßig), während die gravitative Feldstärke G eine plötzliche Veränderung erfährt und entsprechend der Formel (F5) unvermittelt zum Mittelpunkt hin auf Null abfällt.



Graphik 5 *Berechnung des Gravitationsfeldes für einen Punkt außerhalb einer massiven Kugel.*

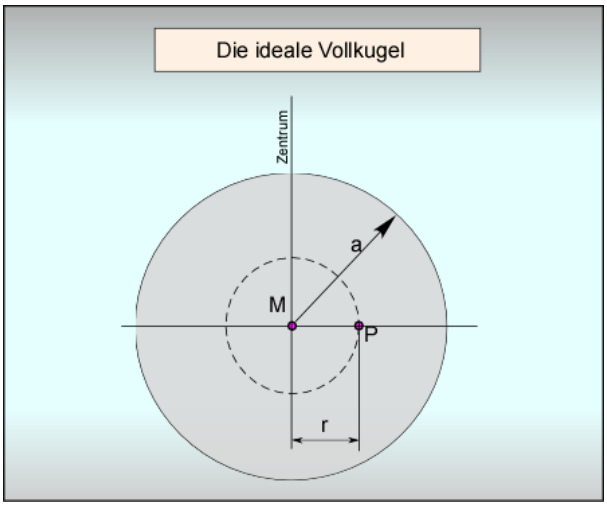
Wenn σ die Massendichte auf einer Kugel ist, dann ist $m = 4\Pi a^2 \sigma$, so dass der Sprung beim Passieren der Kugeloberfläche in der Feldstärke gleich $-4\Pi\gamma\sigma$ ist.

Es ist das gleiche Ergebnis, wie für eine Massenverteilung in einer ebenen Fläche. Fläche und Kugel verhalten sich in ihrer gravitativen Wirkung gleich.

Unterstellt man, dass die Massen im Kugelvolumen gleichmäßig verteilt sind, die Kugel also massiv ist, so können wir die Kugel als eine Summe aus lauter dünnen Kugelschalen auffassen. Jede Kugelschale liefert eine Feldstärke, wie durch die Formeln (F5) und (F6) vorgegeben. Für einen Punkt außerhalb der Kugel werden, weil der Abstand *r* von *P* zu den Mittelpunkten aller Kugelschalen gleich ist, die Massen aufgeteilt, so dass man wieder zu dem Ergebnis von Formel (F5) kommt.

Deshalb gibt eine massive, gleichmäßig massenverteilte Kugel den Punkten außerhalb der Kugel eine Feldstärke und ein Potential vor, die dem entsprechen, als wenn alle Massen der Kugel im Mittelpunkt zu einer vergleichbar großen Punktmasse vereint wären.

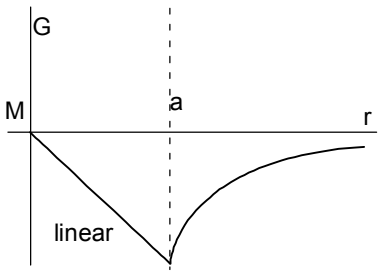
Dieses Postulat gilt auch, wenn die Kugel nicht homogen ist, sofern sie eine kugelsymmetrische Verteilung der Massen aufweist, ebenfalls geltend für den Fall, dass die Massendichte allein vom Abstand zum Mittelpunkt der Kugel abhängt. Dies gilt nicht für eine Massenverteilung, die von der Richtung abhängt.



Graphik 6 *Berechnung des Gravitationsfeldes für einen Punkt innerhalb einer massiven Kugel.*

Um nun die Feldstärke innerhalb einer homogenen Kugel zu finden, betrachten wir einen Punkt P, der einen Abstand von $r < a$ vom Mittelpunkt hat. Wir zeichnen in die massive Kugel einen Radius r ein und bemerken, dass die Schalen mit einem Radius, der größer als r ist, nichts zur Feldstärke in Punkt P beitragen, weil P innerhalb liegt, während die resultierende Feldstärke von allen Schalen mit einem Radius der kleiner als r ist, ein Feld liefert, wie in Formel (F5). Wenn m' die Masse ist, die in einer Kugel mit Radius r liegt, dann ist dies die Feldstärke in P:

$$G = -\frac{\gamma \cdot m'}{r^2} e_r \qquad \textbf{(F7)}$$



Graphik 7 *zeigt die Veränderung von G für eine massive homogene Kugel als Funktion des Abstandes zum Mittelpunkt der Kugel.*

Das Volumen einer Kugel ist $\frac{3}{4} \cdot \pi \cdot a^3$. Die Masse m' folgt dann aus $m' = \frac{m}{\frac{3}{4}\pi \cdot a^3}\left(\frac{3}{4}\pi \cdot r^3\right) = \frac{m \cdot r^3}{a^3}$

Wenn wir alles in Formel (F7) einsetzen, finden wir zum Schluss für die Feldstärke innerhalb der Kugel

$$G = -\frac{\gamma \cdot m \cdot r}{a^3} e^r$$

Die Feldstärke innerhalb einer homogenen Kugel ist deshalb abhängig vom Abstand zum Mittelpunkt (siehe Graphik 7). Wir überlassen es dem Leser nachzuvollziehen, dass das Gravitationspotential für einen Punkt außerhalb der homogenen Kugel einen Wert hat, der gemäß Formel (F4) mehr gilt, als für einen Punkt, der innerhalb der Kugel liegt.

$$V = -\frac{\gamma \cdot m}{2ar^3}\left(r^2 - 3a^2\right) \qquad \text{Für} \quad r < a$$

Wenn wir statt einer homogenen Kugel einen Körper mit einer anderen Form von Symmetrie, zum Beispiel eine nicht homogene Kugel betrachten, müssen wir beachten, dass plötzlich Fehler in den Formeln auftreten. Mehr als alle Probleme mit der Kugelsymmetrie hängen die gravitativen Eigenschaften einer massiven, homogenen Kugel allein vom Abstand des Punktes P von dem Mittelpunkt der Kugel ab. Die Lösung vieler physikalischer Probleme bei der Gravitationsberechnung gelingt durch eine Anpassung an Symmetriebetrachtungen. So wird durch diese Vereinfachung das Problem in eine ansehnliche Mathematik umgewandelt.
Die Gravitationswirkungen zwischen zwei homogenen Kugeln hängt allein vom Abstand zwischen den Mittelpunkten ab.

Zusammenfassung:

Am Anfang dieses Kapitels wurde die Frage gestellt, ob die Formeln, die die Gravitation betreffen und nur für Punktmassen gelten, auch für voluminöse Körper ihre Gültigkeit behalten.
Diese Frage ist beantwortet.

Alle Formeln, die die Gravitation betreffen, gelten – unter bestimmten Bedingungen - sowohl für Punktmassen als auch für kugelförmige Körper. Kugelförmige Körper können dann als Punktmassen gelten, wenn nur die Massen in der Rechnung berücksichtigt werden, die innerhalb einer (die Gravitation kompensierenden) Umlaufbahn des Punktes P liegen. Die Massen außerhalb dieser Umlaufbahn finden keine Berücksichtigung.

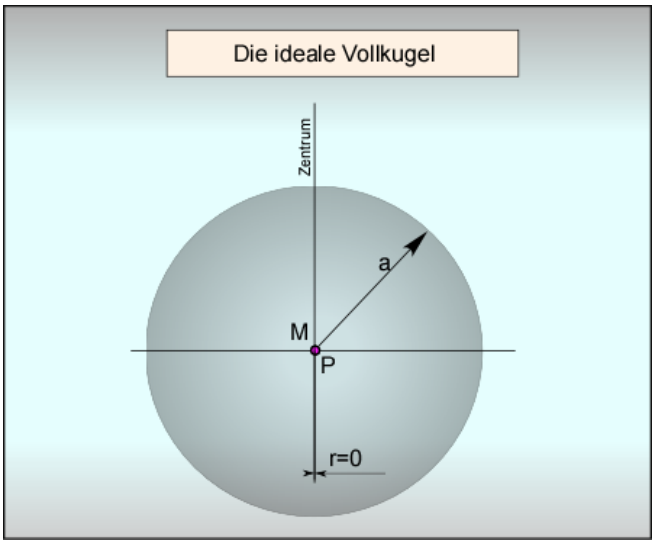
Und der kugelförmige Körper sollte rotationssymmetrisch aufgebaut sein, sodass die Massen im Mittelpunkt des Volumens zusammengefasst werden können.
M und r liegen damit fest und können zur Berechnung von F eingesetzt werden.

3. Die Ableitung der Gravitation in der meßpunktbezogenen, diskreten Rechenweise

Zur diskreten Rechenweise sind grundsätzliche Überlegungen anzustellen, aus denen ein neuer Ansatz ersichtlich wird. Es sind zwei Möglichkeiten gegeben, die im zweiten Kapitel ausführlich als Ergebnis dargestellt wurden.

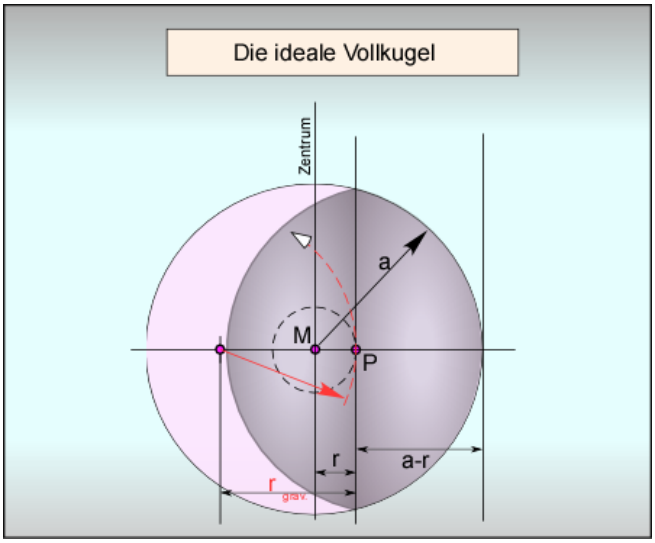
1. Es wird davon ausgegangen, dass im Mittelpunkt eines kugelförmig, punktsymmetrischen Körpers die Gravitation sich nicht spüren lässt. (Also aufgehoben ist.)
2. Es ist davon auszugehen, dass innerhalb einer Hohlkugel keine Gravitation spüren lässt (sich aufhebt), wenn die Massen auf der Oberfläche der Kugel gleichmäßig verteilt sind.

Es ist nun die Frage zu stellen, was geschieht, wenn die Massen ungleichmäßig, also asymmetrisch verteilt sind. Betrachten wir zunächst den erstgenannten Ansatz, dass sich an einem Punkt P, der sich im Mittelpunkt einer Massenverteilung befindet, keine Gravitation spüren lässt (sich aufhebt).



***Graphik** 8 Im Mittelpunkt einer homogenen massiven Kugel ist die Gravitation = 0*

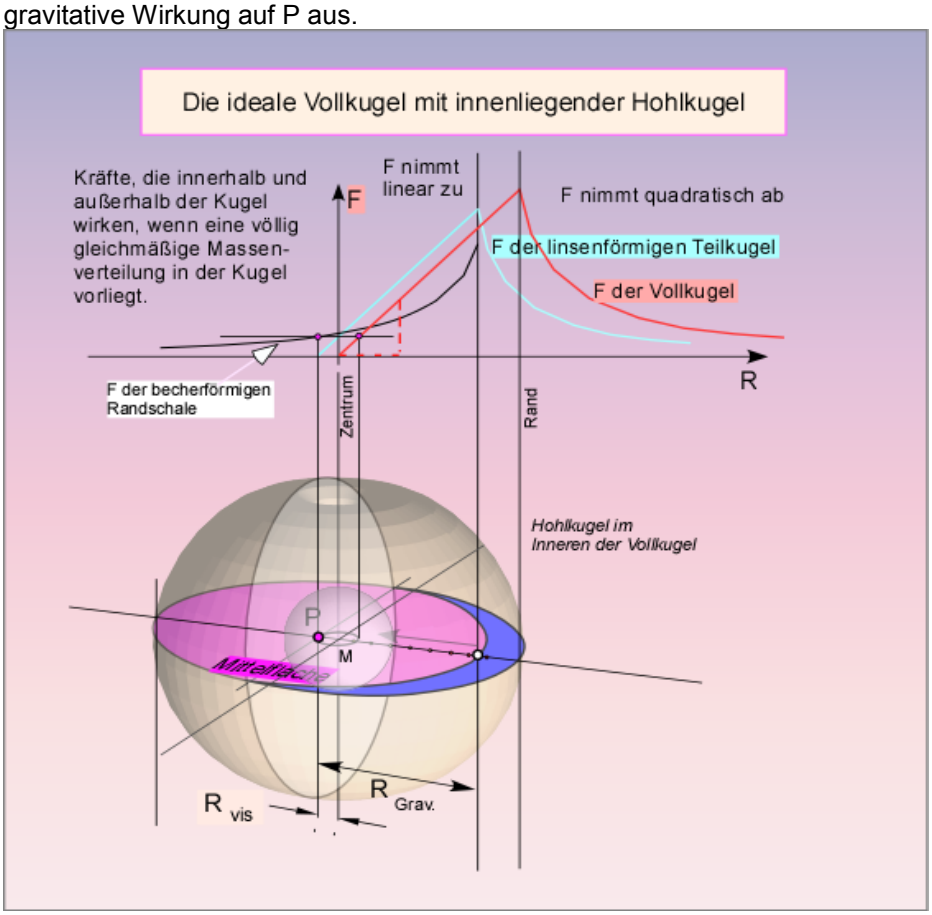
Die Massenverteilung in diesem kugelförmigen Körper ist gleichmäßig. Die den Mittelpunkt umgebenden Massen der Kugel heben sich dann in ihrer gravitativen Wirkung auf, wenn sie, vom Mittelpunkt aus betrachtet, sich gleichweit und genau entgegengesetzt gegenüberliegen.
Daraus folgt, dass der Punkt P im Mittelpunkt keine Gravitationswirkung erfährt.



Graphik 9

Lässt man nun P aus dem Mittelpunkt der Kugel zum Rand wandern, so bleibt die Aufhebung der Gravitation für alle P umgebenden Massen auch dann erhalten, solange sie sich gleichweit und gegenüberliegend von P befinden. P liegt dann im Zentrum oder im Mittelpunkt eines linsenförmigen, punktsymmetrischen Volumens, in dem sich alle Massen in ihrer gravitativen Wirkung in Bezug auf P aufheben. Dieses linsenförmige Volumen wird gebildet durch Spiegelung an einer orthogonal zum Radius r im Abstand r gelegenen gedachten Fläche. Diese Fläche bildet zusammen mit der nahezu halbkugeligen Wölbung mit der Höhe a – r einen Kugelabschnitt (in der Graphik als Kreisabschnitt sichtbar). Spiegelt man diesen Kugelabschnitt in P um 180 Grad, so ergibt dieser Kugelabschnitt zusammen mit der Spiegelung desselben, ein linsenförmiges, symmetrisches Volumen, in dessen Mittelpunkt oder Zentrum sich P befindet.
Gravitative Wirkungen auf P gehen von diesem linsenförmigen Volumen nicht aus, da sich alle Massen, die von P aus gesehen sich gegenüberliegen und gleichweit entfernt sind, sich in ihrer gravitativen Wirkung auf P aufheben. Von der massiven Gesamtkugel bleibt nach Abzug des linsenförmigen Volumens nur ein becher- oder schalenförmiges Volumen, das gravitativ auf P wirkt. Es liegt unmittelbar links des linsenförmigen Volumens. Durch dieses becher- oder schalenförmige Volumen entsteht eine Asymmetrie in der Massenverteilung der Gesamtkugel in Bezug auf Punkt P.
Dem aufmerksamen Leser wird nicht verborgen geblieben sein, dass sich r, das sich ja auf den Mittelpunkt des kugelförmigen Gesamtkörpers bezieht, nun für die gravitative Berechnung nicht mehr relevant sein kann. Auch die Masse des nun bedeutungslos gewordenen „Innenkreises“ aus der integralen, zentrumsbezogenen Berechnung, ist verschieden von der Masse des becher- oder schalenförmigen Volumens. Der Radius r und die Innenkreismasse befinden sich ganz im Bereich der sich gegenseitig aufhebenden gravitativen Kräfte und sind damit bedeutungslos.
Betrachten wir den <u>zweitmöglichen Ansatz</u>. Als Ergebnis der Ableitung im zweiten Kapitel wurde festgestellt, dass sich im Inneren einer Hohlkugel keine gravitativen Kräfte auswirken. In der nun folgenden Graphik 10 wird diese Hohlkugel zentrisch im Inneren einer massiven Kugel dargestellt. Die Hohlkugel ist so groß, das sich P mit seiner ganzen Innenbahn im Inneren der Hohlkugel befindet Es gibt damit keine Innenmassen, von denen P angezogen werden könnte. Es bleibt dem werten Leser überlassen, die sich ergebenden Folgerungen in der Graphik selbst nachzuvollziehen. Gezeigt werden die gravitativen Kräfte und die unterschiedlichen Radien. Das r aus der integralen, zentrumsbezogenen Berechnung wird zu $r_{vis.}$ umbenannt, weil sich die Innenbahn des Punktes P nur noch als eine visuelle Umlaufbahn darstellt.

Das Ergebnis dieser Betrachtung ist für beide Ansätze gleich. Im Innenbereich der massiven Kugel gibt es keine gravitativen Kraftwirkungen auf Punkt P von Massen, die nahe dem Zentrum sind. Einzig das becherförmige Volumen im Randbereich, in Graphik 9 und 10 sichelförmig dargestellt, übt eine gravitative Wirkung auf P aus.



Graphik 10

Es handelt sich in dieser Graphik um eine rein schematische Darstellung aller Kurven.
Auch die Masse des becherförmigen Volumens kann nicht einfach zu einem gemeinsamen Schwerpunkt zusammengefasst werden, da sich die Massen gegenseitig teilweise aufheben und auch unterschiedlich stark auf P, je nach Entfernung, einwirken. Im Rahmen dieses Aufsatzes wird keine genaue Berechnung durchgeführt, diese kann in einem weiteren Aufsatz [2] in dieser Webseite nachvollzogen werden. Es wird empfohlen, beide Aufsätze im Zusammenhang zu lesen.
Es werden nur die Kräfte, nicht die Massen, der einzelnen Massepunkte des becherförmigen Volumens zusammengefasst und in einem gemeinsamen Drehpunkt mit dem Abstand $r_{grav.}$ von P festgelegt. (rot markiert in der Graphik 9) Die Kräftesumme des becherförmigen Volumens kann nun in ein entsprechendes Massenäquivalent umgerechnet werden. Durch Umwandeln von (F1) erhalten wir:

$$M_{grav.} = \frac{F \cdot r^2}{\gamma \cdot m} = \frac{F \cdot r_{grav.}^2}{\gamma \cdot m} \qquad \text{r in } r_{grav.} \text{ umbenennen} \qquad \textbf{(F8)}$$

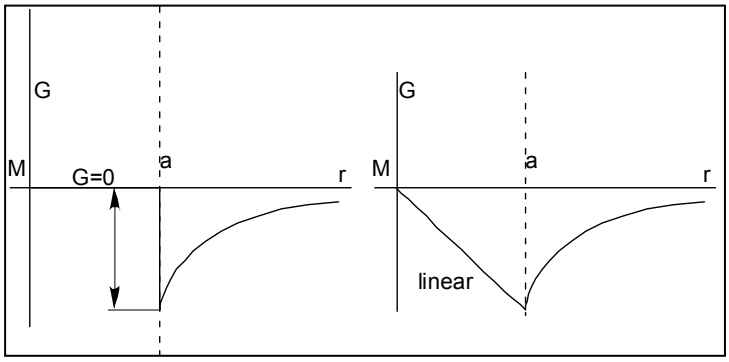
So erhalten wir die anziehende Masse (als Äquivalent), den Radius $r_{grav.}$, aus der Zusammenfassung[2], und die Gravitation, die auf P wirkt.

Die diskrete Berechnung kann zunächst nicht über eine zusammenfassende Formel gelöst werden. Sie wird aber möglich, indem man eine massive Kugel in eine möglichst große Anzahl von Einzelpunkten aufteilt. Durch diese Rasterung entsteht eine Vielzahl von Einzelrechnungen, die dann sinnvoll zu einem Ergebnis zusammengefasst werden können. Mit den heutigen Möglichkeiten einer computergestützten Berechnung ist das ja auch durchaus mit einfachen Mitteln möglich. Es wurde für die diskrete Berechnung ein Kugelmodell in EXCEL entworfen, das mit 5065 Massepunkten arbeitet.

---

[2] „ Das Mehrkörperproblem in der Berechnung einer Galaxie und der Virialsatz und seine Anwendung“ M. Krause 3/2005

Bedingt durch die Rasterung ist mit nicht absolut genauen Ergebnissen zu rechnen. Der Fehler liegt bei ca. 1% relativer Toleranz. Dies ist angesichts des Umfangs der diskreten Berechnung ein vertretbarer Fehler.
Es wurden 10 Messpunkte +1 Mittelpunkt vom Zentrum bis zum Rand der massiven Kugel festgelegt. Für jeden Messpunkt müssen die Kräfte der anderen 5064 Massenpunkte neu berechnet werden, so dass die Gesamtsummen der Berechnungen bei über 50.000 Einzelrechnungen liegt. Das Ergebnis der diskreten Berechnung des Gravitationsfeldes wird nun in der folgenden Graphik dargestellt.

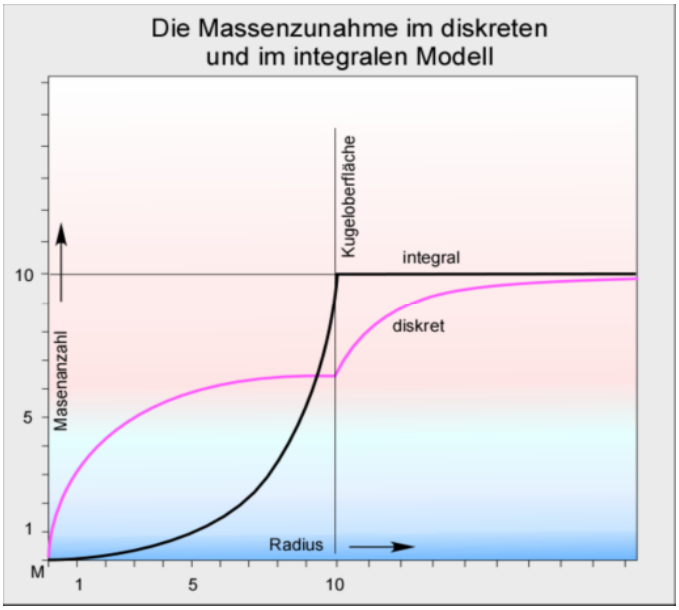


Graphik 11 Es sind (links im Bild) die Ergebnisse für eine Hohlkugel, deren Massen auf der Oberfläche gleichmäßig verteilt sind und für eine massive Kugel (rechts im Bild) dargestellt. In beiden Kugeln wurde für P die Gravitation innerhalb und außerhalb berechnet. Vergleicht man die Ergebnisse mit der integralen, zentrumsbezogenen Berechnung, so stellt man fest, dass sich die Ergebnisse entsprechen.

Die diskrete, meßpunktbezogene Berechnung und
die zentrumsbezogene, integrale Berechnung
führen beide, innerhalb und außerhalb einer massiven homogenen Kugel oder Hohlkugel zu den gleichen Ergebnissen bei der auf den Punkt P wirkenden Gravitationskraft!

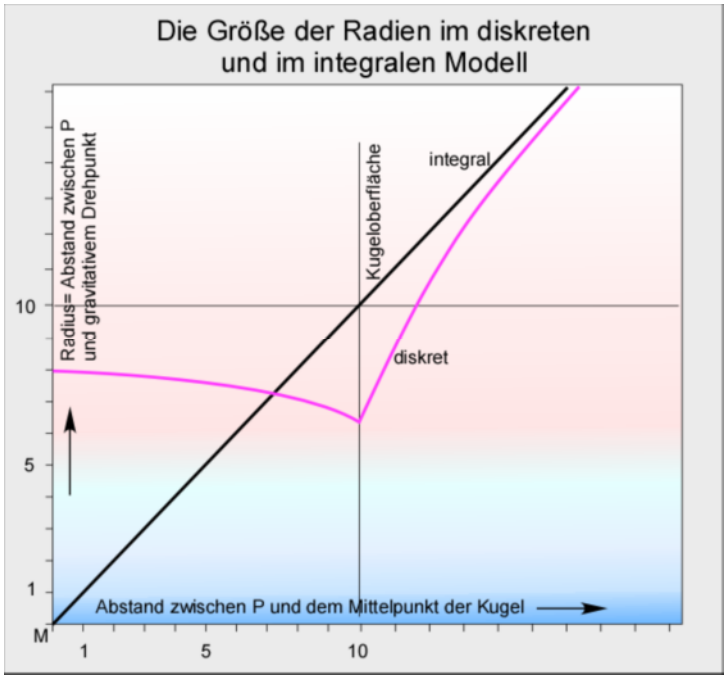
Der Aufwand ist allerdings bei der diskreten Berechnung erheblich größer. Die diskrete Methode hat aber einen entscheidenden Vorteil gegenüber der zentrumsbezogenen, integralen Berechnung. Die Massen können im Rahmen der Kugelsymmetrie beliebig verändert werden und man handelt sich deswegen keine Fehler ein, wie das beim Modell 1 der Fall wäre. Erinnern wir uns an den Satz aus Kapitel 2:……..“Wenn wir statt einer homogenen Kugel einen Körper mit einer anderen Form von Symmetrie, einer nicht homogenen Kugel betrachten, müssen wir beachten, dass Fehler in den Formeln auftreten.“ Diese Fehlerquelle gibt es bei der diskreten Berechnung nicht.

Betrachten wir nun den bereits erkannten Umstand der Verschiedenheit der Ausgangswerte (r, M), also von der gravitativ wirkenden Masse M und dem Radius r, in den beiden Berechnungsmodellen. Es ist schon erstaunlich, dass die Gravitation als Ergebnis in beiden Modellen gleich ist und die Ausgangswerte, die zum gleichen Ergebnis führen, unterschiedlicher nicht sein können.
Vergleichen wir zunächst die Werte der anziehenden Massen der beiden Rechenmodelle miteinander.



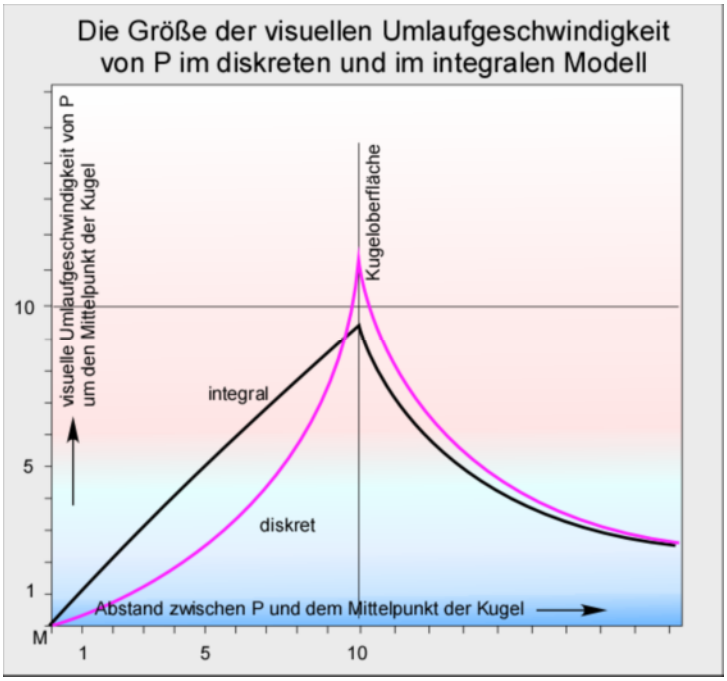
Graphik 12 Es ist deutlich zu erkennen, wie unterschiedlich die auf P wirkenden Massenanteile in den beiden Modellrechnungen der massiven Kugel sind. Die diskret ermittelten Massenwerte (Massenäquivalenz) der pinkfarbenen Kurve werden selbst außerhalb der Kugel nicht den absoluten Massenwert der massiven Kugel erreichen. Der Grund liegt in den sich teilweise aufhebenden gegenüber von P liegenden Massen der Kugel. Liegen sie sich um 180° gegenüber, so wäre ihre gravitative Wirkung auf P (bei gleicher Entfernung) gleich Null. Wird der Winkel kleiner, so heben sie sich entsprechend dem Kräfteparallelogramm, nur noch teilweise auf.
Die schwarze Kurve, der Innenmassenzuwachs der Kugelschalen bei der integralen Berechnung, geht beim Passieren der Kugeloberfläche in eine Gerade über, da ein weiterer Massenzuwachs nicht mehr stattfindet. Es ist einsichtig, das bei gleichen Kräften (als Ergebnis) in den unterschiedlichen Rechenmethoden (integral und diskret) aber unterschiedlicher

Massen als Ausgangswert, zwangsläufig die Radien in den beiden Modellen auch unterschiedlich sein müssen. Auch dies soll graphisch dargestellt werden.



Graphik 13 Der Radius bei der integralen, zentumsbezogenen Berechnung ist stetig ansteigend und zeigt den Abstand zwischen P und dem Mittelpunkt der massiven Kugel an. Der Radius für die diskrete, meßpunktbezogene Berechnung zeigt den Abstand zwischen P und dem gravitativen Drehpunkt der gravitativ wirkenden Massen der massiven Kugel an. Dieser Radius heißt $r_{grav.}$ und ist zu unterscheiden von $r_{vis.}$ (= visuell), da der Innenkreis von P in der diskreten Berechnung eine Librationsbahn und nicht die tatsächliche gravitative Bahn darstellt.
Diese Librationsbahn ist nur die sichtbare (visuelle) Bahn von P um den Mittelpunkt der massiven Kugel.

Man erkennt, dass eine auf die unterschiedlichen Radien oder auf die unterschiedlichen Massen aufbauende weiterführende Berechnung, für die integrale und für die diskrete Berechnung zu unterschiedlichen Ergebnissen führen muss. Möchte man z.B. die visuelle Umlaufgeschwindigkeit von P um den Mittelpunkt der massiven Kugel ausrechnen, so erhält man folgerichtig auch unterschiedliche Geschwindigkeiten.



Graphik 13
Mit der diskreten Rechenmethode erhält man im Randbereich der Kugel, bei gleichmäßiger Massenverteilung, eine höhere visuelle Umlaufgeschwindigkeit von P um den Mittelpunkt der Kugel. Bei einer ungleichmäßigen Massenverteilung, wenn mehr Massen im zentralen Bereich der Kugel angesiedelt sind, wird, zwar in abgeschwächter Form, auch die visuelle Umlaufgeschwindigkeit im Randbereich höher sein, als bei der integralen Berechnung.

4. Zusammenfassung für die Berechnung der Gravitation eines kugelförmigen Körpers

Fasst man die bisherigen Ergebnisse zusammen, so wird klar, das die beiden Rechenmethoden zu unterschiedlichen Ergebnissen führen. Einzig für die Berechnung der gravitativen Kraft ist die integrale Methode die schnellere Möglichkeit um zu einem in diesem Fall korrekten Ergebnis zu kommen. Dieses gleiche Ergebnis mit den beiden Rechenwegen zur Berechnung der gravitativen Kraft soll genauer untersucht werden **(*** siehe weiter unten**)**

Einschränkend sollte aber gesagt werden, dass bei der integralen Rechenmethode, nur bei gleichmäßiger Massenverteilung innerhalb der Kugel, ein richtiges Ergebnis für die gravitative Kraft zu erwarten ist. Anders verhält es sich mit der diskreten, meßpunktbezogenen Rechenmethode, sie ist zwar erheblich aufwendiger und auch nur mit Hilfe eines Rechners praktikabel einsetzbar, dafür ist sie aber für jede Gravitationskräfteberechnung universell bei jeder kugelsymmetrischen Massenverteilung einsetzbar.
Es konnte gezeigt werden, dass die Basiswerte für die Gravitationsberechnung (der anziehenden Masse und des relevanten Radius) in den beiden Rechenmodellen nicht nur erheblich voneinander abweichen, sondern sich in gewissen Grenzen als gegenläufig darstellen. Daraus folgt, dass im vorliegenden Fall jede weitere Berechnung mit den unterschiedlichen Basiswerten zu unterschiedlichen Ergebnissen führen kann. Weiterhin wird bei der diskreten Rechenmethode eine visuelle (scheinbare, von einem ortsunabhängigen Inertialbeobachter wahrnehmbaren) Umlaufgeschwindigkeit um den Mittelpunkt der massiven Kugel nur über den gravitativen Umlauf errechnet. Beide Umlaufzeiten (der gravitative, sowie der visuelle) dauern gleichlang, haben aber unterschiedliche Umlaufgeschwindigkeiten. (Graphik 13) Die Folgen dieser unterschiedlichen Ergebnisse bei der Umlaufgeschwindigkeitsberechnung sind aber noch weitreichender.
Versucht man bei einer fernen Galaxie die Masse derselben über die visuelle Umlaufgeschwindigkeit der sie umrundenden Massen zu bestimmen, so wird mit der integralen, zentrumsbezogenen Berechnung zwangsläufig eine zu große Masse errechnet werden. Dieser Rechenfehler führt dann unausweichlich zu der irrigen Annahme einer nicht sichtbaren dunklen Materie. Siehe auch den Vergleich zwischen Integraler und diskreter Berechnung in einer weiteren Arbeit hier im Forum. [3]

***** Was ist der Grund dafür, dass die diskrete und die integrale Rechenmethode zu einem gleichen Ergebnis nur in der gravitativen Kräfteberechnung führen?

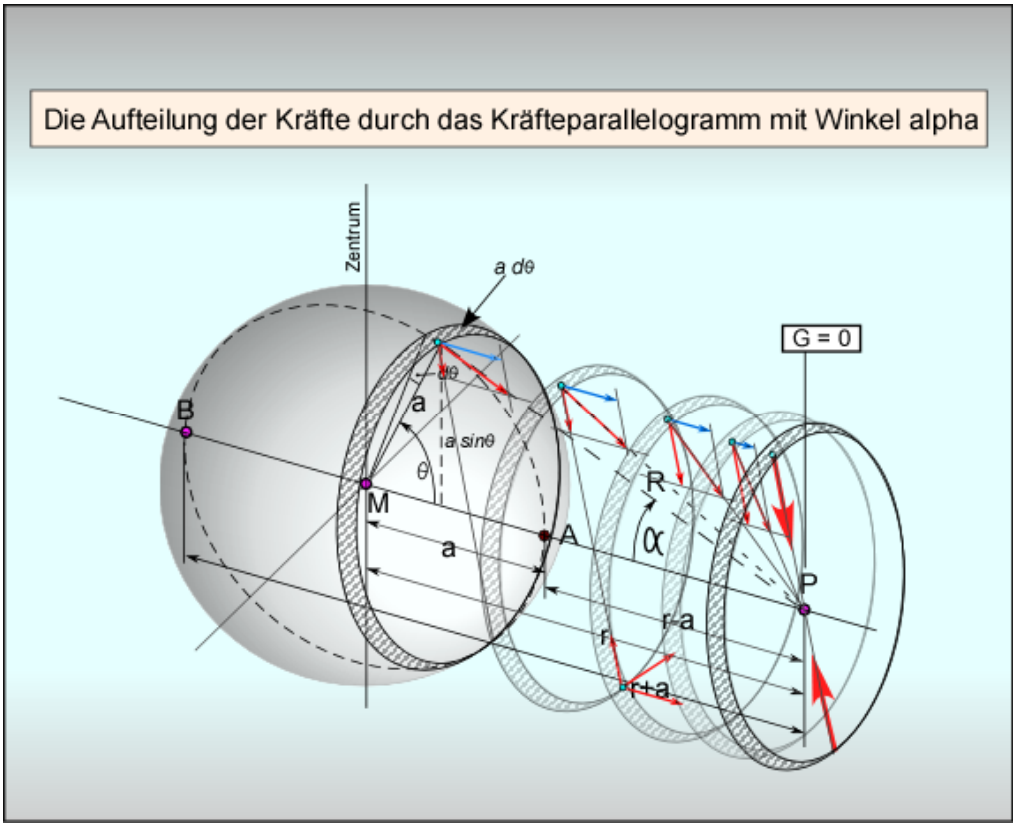
Untersucht man die Herleitung der Formeln für die integrale, zentrumsbezogene Berechnung genauer, so ist folgendes festzustellen:
Es sind zwei gegenläufige „Fehler"(Unterlassungen), die in der Herleitung gemacht werden, die sich bei der Integration wieder gegenseitig aufheben. Es sind keine Fehler in der mathematischen Herleitung, diese ist korrekt nach den Regeln erfolgt. Es sind zwei gedankliche Fehler, genauer gesagt, es sind Unterlassungen, die gemacht wurden. Wobei der zweite Fehler in einem anderen physikalischen Bereich, zum Beilspiel der Statik kein Fehler wäre. Die Zusammenfassung der Massen geschieht zunächst nur über das Potential V (Skalar) und nicht über die gravitativen Kräfte G oder F (Vektor). Das Problem ist dabei, das die über die Skalarberechnung erhaltene Formel, die keine Richtungsangabe enthält, dann in eine Vektorformel mit allgemeiner Richtungsangabe (e_r) umgewandelt wird. Formel **(F4)** in Formel **(F5)** und **(F6)**
Diese Umwandlung ist nicht korrekt, da keine Richtungsangaben der Kräfte in Bezug auf Punkt P aus der Potentialformel abgeleitet werden können. Mit diesem Kunstgriff einer versuchten Vereinfachung handelt man sich einen Fehler ein. Untersucht man nun die relevanten Formeln und betrachtet sie als Ableitung der Kräfte, die auf Punkt P wirken, so wird deutlich, wo die Fehler liegen. Es wird also im folgenden Absatz das gravitative Kräftepotential V so behandelt, als wäre es F oder G . Der eigentliche Bezug wird in Klammern dahinter gesetzt.

Der erste Fehler wird in der Formel (F1.1) gemacht. Die gravitativen Kräfte F oder G (Das Gravitationpotential V) eines Streifens, das auf P wirkt, ist zu hoch angesetzt. Es wird an dieser Stelle der Berechnung versäumt, das sich gegenseitige teilweise Aufheben der sich gegenüberliegenden Massen im Streifen in Bezug auf P in die Berechnung mit einzubeziehen. Diese Reduzierung der Kräfte (des Potentials) hätte gemäß der Aufsplittung der Kräfte in einem Kräfteparallelogramm erfolgen müssen. Je näher der Punkt P von außen an die Oberfläche der Kugel rückt, desto größer wird der Öffnungswinkel (2 x α)zwischen den gegenüberliegenden Massen des Streifens und damit wird der sich aufhebende Kräfteanteil auch größer. Durch diese Unterlassung werden die gravitativen Kräfte (wird das Potential) des Streifens größer gerechnet, als sie (es) eigentlich sind (ist). Wie man Massen korrekt zusammenfasst, kann unter [4] in diesem Forum eingesehen werden. Graphisch wird dieser Fehler nachfolgend an dem Bild gezeigt, der die Streifen in Graphik 2 darstellt.

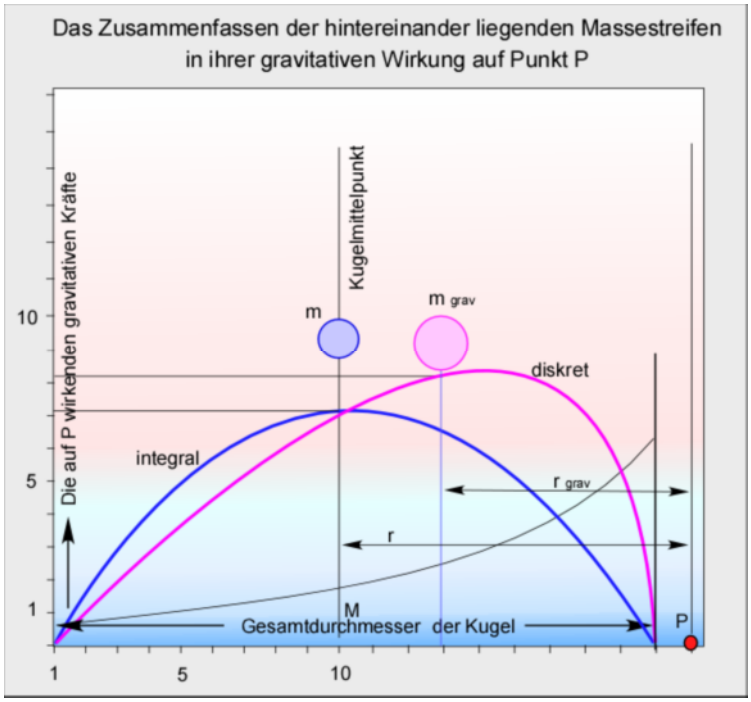
---

[3] „Der Vergleich von integraler und diskreter Berechnung bei der galaktischen Massenbestimmung." M. Krause 3/2005

[4] Das Mehrkörperproblem in der Berechnung einer Galaxie und der Virialsatz und seine Anwendung M. Krause 3/2005 Seite 6 und 7



Graphik 14 a *(ehemals Graphik 2)*
Nur der Kräfteanteil im Kräfteparallelogramm, der auf Punkt P gerichtet ist, wirkt gravitativ auf P. Hier dargestellt durch die blauen Pfeile im oberen Teil des Bildes. (die untere Hälfte der Kugel verhält sich spiegelbildlich) Für die Streifen, die auf der Kugeloberfläche liegen, gilt das in gleicher Weise. Liegt P z.B. im Mittelpunkt des kreisförmigen Streifens (ganz rechts dargestellt), so heben sich alle Kräfte des Massestreifens in Bezug auf P (G = 0) auf.



Graphik 14 b
Der zweite Fehler findet in der Formel (F3) seinen Niederschlag, hier werden die Kräfte (wird das Potential) zu niedrig angesetzt. Der Grund liegt in der Zusammenfassung aller Streifen-Kräfte (Potentiale) im Mittelpunkt der Massen der Kugel (blau) und nicht im gravitativen Mittelpunkt der Kräfte (Potentiale), als pinkfarbener Kreis dargestellt. Für eine Berechnung in der Statik ist dieser Umstand unerheblich, nicht aber im Bereich der Gravitation. So, durch die Zusammenfassung aller Massen im Mittelpunkt der Kugel, rückt die zusammengefasste Masse weiter von P weg (Abstand r), als dies im gravitativen Schwerpunkt der Fall wäre (Abstand $r_{grav.}$). Damit wird auch die Kraft (das Potential) kleiner, als diese(s) in Wirklichkeit ist. Die quadratische Zunahme der Kraft, in

Bezug auf P, ist als schwarze Kurve angedeutet. Wie Einzelmassen diskret richtig zusammengefasst werden, ist unter [5] in diesem Forum nachvollziehbar.

Beide Fehler, der positive und der negative, addieren sich in der integralen, zentrumsbezogenen Berechnung und heben sich zufällig in ihrer Summe auf. Das ist der Grund, warum wir zu einem „richtigen" Ergebnis in der integralen Gravitationsberechnung der Kugel kommen.

Da die Integrale, Zentrumsbezogenen Rechenweise in allen Parametern, außer der gravitativen Kraft, andere Werte zeigt als die diskrete, meßpunktbezogene Rechenweise, ist sie aufgrund dieser Tatsache und ihrer fehlerhaften Zusammenfassung der Kugelmassen, trotz eines richtigen Ergebnisses im Bereich der Gravitation, grundsätzlich zu Berechnungen in der Himmelsmechanik unbrauchbar.

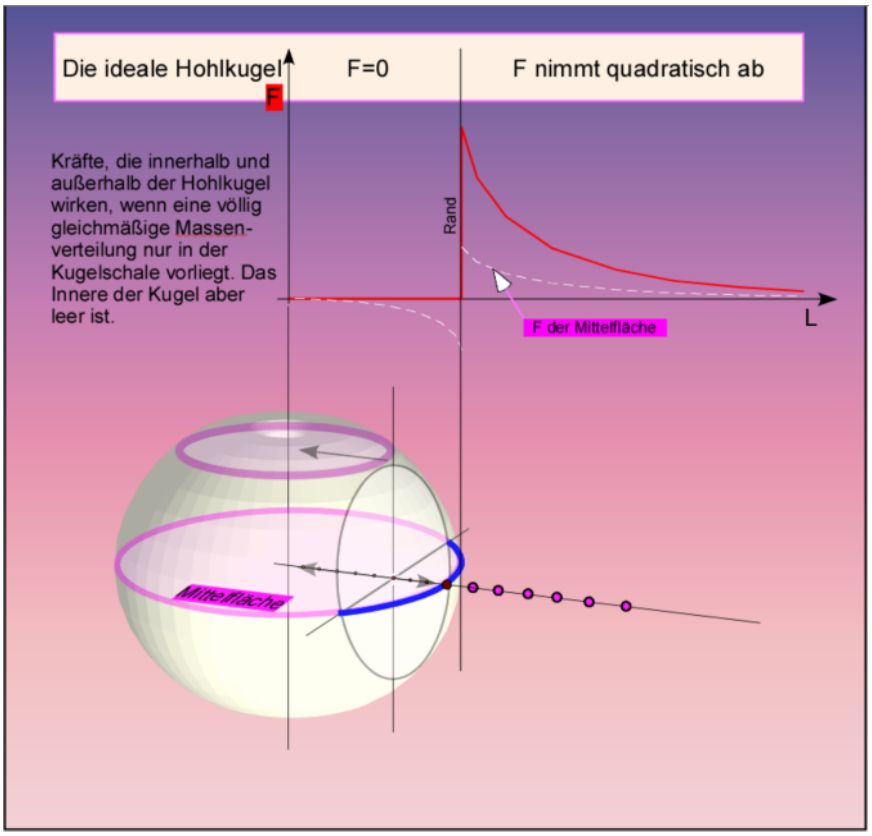
Für die Kugel wurde eine Ableitung in der diskreten und der integralen Berechnung vorgestellt. Wie aber sieht es bei der Massenfläche aus? Entsprechen sich dort auch die Kräfte, wie bei der Kugelberechnung?
Deshalb soll nachfolgend, in einem zweiten Teil dieser Arbeit, die Herleitung der Gravitation einer Massenfläche folgen.

Teil 2

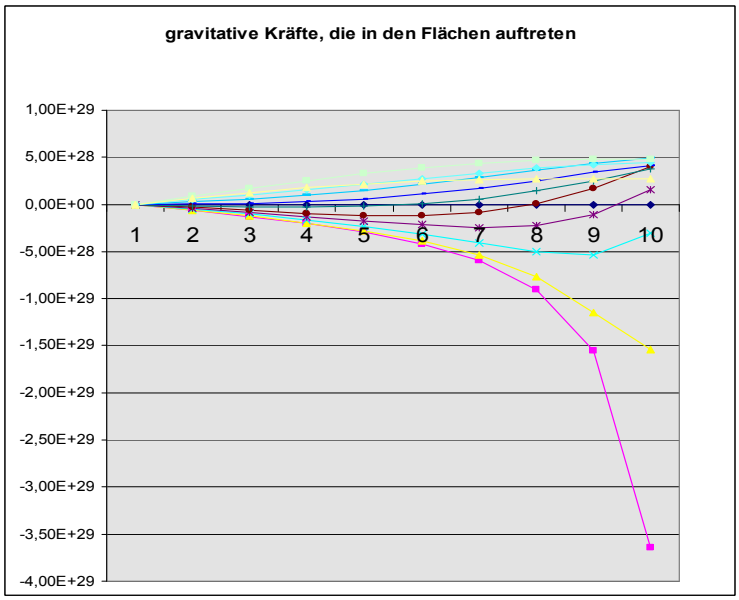
[5] Das Mehrkörperproblem in der Berechnung einer Galaxie und der Virialsatz und seine Anwendung M. Krause 3/2005 Seite 3 ff

5. Die Herleitung der Gravitation einer Massenfläche aus der Kugelberechnung

Es wird zunächst von einer idealen Hohlkugel ausgegangen, auf deren Oberfläche die Masse gleichmäßig verteilt ist. Im ersten Teil dieser Arbeit wurde gezeigt, das es für einen Punkt P innerhalb dieser Hohlkugel keine Gravitationswirkungen gibt.
Folgende Überlegung soll nun näher betrachtet werden. Der kugelförmige Körper wird in schmale, waagerechte Flächen unterteilt. Zwei dieser Flächen (genau genommen sind es nur Massenringe) werden näher betrachtet. Im Punkt P wird die Kugel orthogonal zum Radius r im Abstand r in zwei Kugelsegmente zertrennt. Alle Massen des vom Mittelpunkt abgewandten Kugelsegments ziehen mit einer gerichteten Kraft, die vom Mittelpunkt weg weist, gravitativ an P. Diese Kraft soll negative Gravitation heißen, weil sie vom Kugelmittelpunkt wegweist. Alle Massen des anderen Kugelsegments ziehen am Punkt P mit genau der gleichen Kraft in die Gegenrichtung, nämlich zum Kugelmittelpunkt. Diese Kraft heißt dann positive Gravitation. Da sich die gravitativen Kräfte der beiden Kugelsegmente gegenseitig aufheben, ist die Gravitation innerhalb der Hohlkugel im Punkt P = 0.



Graphik 15 In dieser Graphik sind zwei Flächen besonders hervorgehoben: Es ist die Mittelfläche, in deren Zentrum der Mittelpunkt der Kugel liegt. Und es ist eine Fläche im oberen Teil der Kugel, deren Radius kleiner als der Radius vom Punkt P aus ist.
Die gravitative Kraft aller Flächen zusammen auf Punkt P wirkend ist gleich 0, da alle Flächen zusammen die gesamte Hohlkugel ergeben. Betracht man die Fläche, deren Radius kleiner als der Radius des Punktes P ist, so ist klar, dass in dieser Fläche nur Kräfte in Richtung zum Mittelpunkt hin, in Bezug auf Punkt P, wirken können. Dies wird kenntlich gemacht durch einen Pfeil, der Richtung Mittelachse und damit Richtung Mittelpunkt der Hohlkugel weist. Diese Fläche übt auf Punkt P eine positive (zum Mittelpunkt der Hohlkugel gerichtete) Kraft aus.
Betrachtet man nun die Mittelfläche, so ist ersichtlich, dass es zwei gravitative Bereiche gibt. Der pinkfarbene Bereich der Mittelfläche übt eine zum Mittelpunkt hin gerichtete Kraft auf den Punkt P aus, während der blaue Teil der Mittelfläche, der Mittelpunkt abgewandten Seite, eine zum Rand hin weisende Kraft auf den Punkt P ausübt.
Die Frage, welcher der Bereiche der Mittelfläche stärker gravitativ wirkt und damit welche Kraftwirkungen auf Punkt P von der Mittelfläche in Summe ausgeübt werden, ist leicht zu beantworten. Wenn die Summe aller Flächenkräfte (der Gesamthohlkugel) auf Punkt P gleich Null ist, dann ist die Kraft der Mittelfläche auf Punkt P negativ, das heißt zum Rand hin gerichtet. Der Grund hierfür liegt in der positiv wirkenden kleinen Fläche, deren Radius kleiner als der des Punktes P ist. Ist diese hier positiv, so muss jene zum Ausgleich (um auf F = 0 in der Gesamtkugel zu kommen) negativ sein.



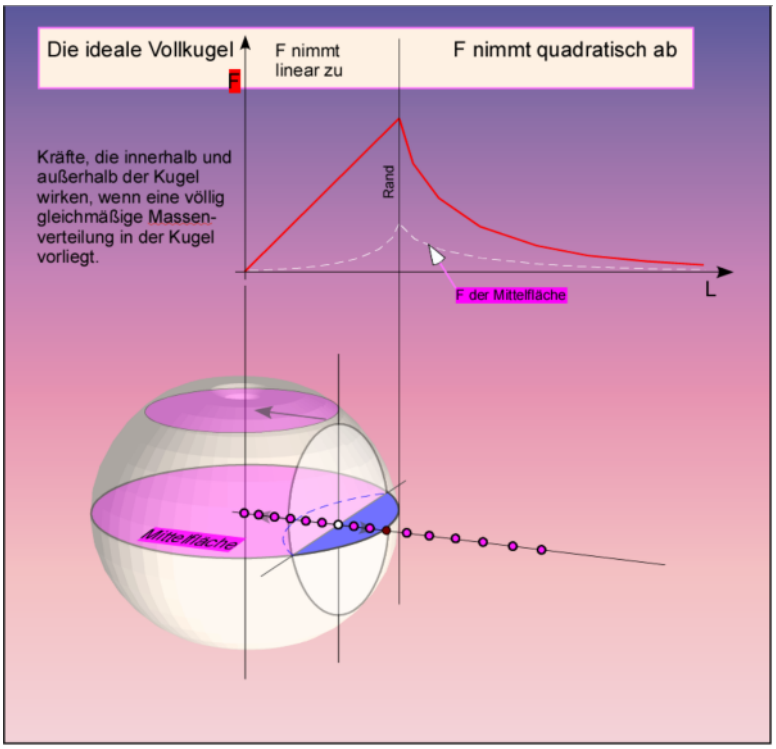
Graphik 16 Es werden in dieser Graphik die gravitativen Kräfte, die auf Punkt P wirken würden, für 10 Flächen (je ober- und unterhalb der Mittelfläche) der Gesamthohlkugel dargestellt. In der Summe ergeben sie für die Kräfte innerhalb der Gesamthohlkugel F = 0
(Werte entnommen aus der EXCEL Modelldatei KOKUG10…..)

Die relevante Mittelfläche ist durch die pinkfarbene Kurve markiert. Deutlich ist zu erkennen, dass ein Teil der Flächen nur positiv auf P einwirken, während die Mittelfläche überwiegend den negativen Ausgleich liefern muss.
Die Mittelfläche der Hohlkugel ist ja die Massenfläche, in deren Ebene Der Mittelpunkt und auch Punkt P liegen. Sie ist die Fläche, deren Kraftwirkungen auf Punkt P näher untersuch werden soll. Es ist nur zu offensichtlich, das die Ergebnisse der Gravitationsberechnung, die für die Hohlkugel gelten, nicht auf die Fläche übertragbar sind.

Die Massenfläche, deren gesamte Masse gleichmäßig am Rand verteilt ist, verhält sich nicht wie eine Hohlkugel. Eine ideale Hohlkugel übt keine gravitativen Kräfte auf einen innenliegenden Punkt P aus, bei einer runden Hohlfläche ist das im Gegensatz dazu anders, hier wird der Punkt P gravitativ nach außen zum Rand hin angezogen.

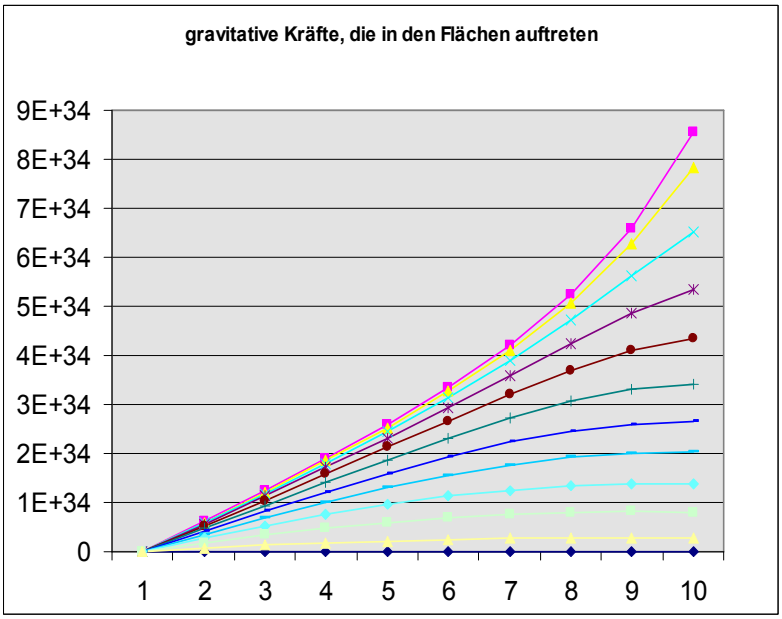
Diese zum Rand hin gerichtete Gravitation wird umso stärker, je näher der Punkt P am Rand liegt.

Betrachten wir noch die ideale massive homogene Vollkugel und die darin enthaltene Mittelfläche.



Graphik 17
Wieder zerteilen wir die Kugel in viele waagerechte Flächen und betrachten speziell die Mittelfläche, in deren Mitte der Mittelpunkt der Kugel liegt. Da in der gesamten Mittelfläche eine homogene Massenverteilung vorliegt, können wir durch Spiegelung des blau markierten Kreissegments, deren Massen eine zum Rand hin wirkende gravitative Kraft auf Punkt P ausüben, den Bereich in der Fläche ermitteln, der zur Aufhebung der negativ wirkenden Kräfte benötigt wird. Der pinkfarbene Bereich mit der blauen Strichelung zusammen mit dem blauen Bereich zeigt den linsenförmigen Flächenbereich, in dem sich alle gravitativen Kräfte in Bezug auf Punkt P gegenseitig aufheben. Zieht man diesen neutralen Bereich von der Gesamtmittelfläche ab, so bleibt

der Bereich der Fläche übrig, der den Punkt P zum Mittelpunkt der Fläche zieht. Auch hier ist ersichtlich, dass der gravitative Schwerpunkt nicht im Mittelpunkt der Fläche liegen kann.

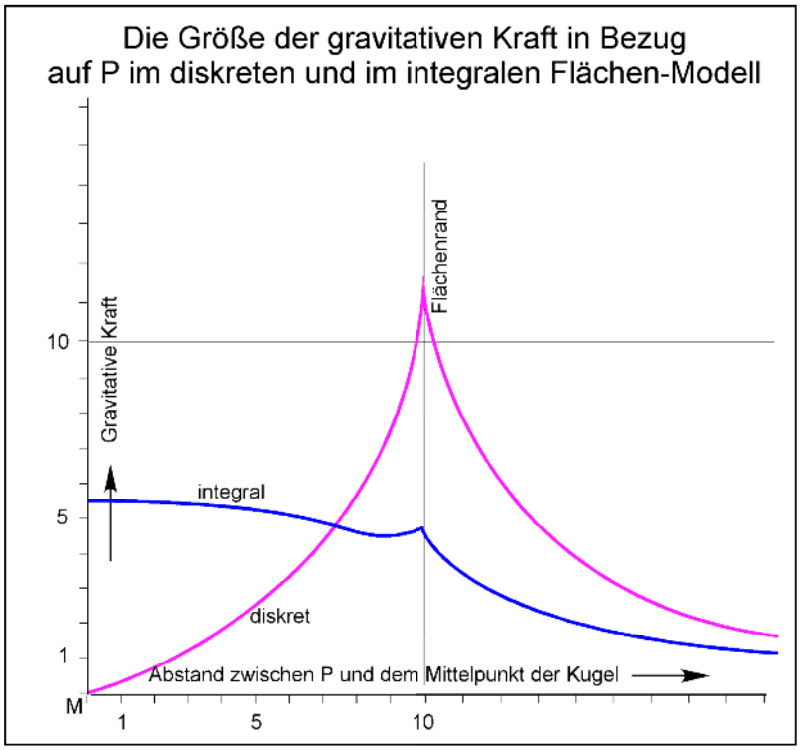


Graphik 18 In dieser Graphik werden die gravitativen Kräfte, die auf Punkt P wirken würden, für 10 Flächen (je ober- und unterhalb der Mittelfläche) der massiven Gesamtkugel dargestellt. In der Summe ergeben sie für die Gesamtkugel F = linear ansteigend, wie in Graphik 11 (rechte Seite) zu betrachten. (Werte entnommen aus der EXCEL Modelldatei KOKUG10…..)

Die Steigung der Gravitationskraft ist innerhalb der Fläche nicht linear, wie es bei der idealen Vollkugelbetrachtung ja war, sondern sie ist quadratisch ansteigend mit linearem Anteil,

da der neutrale Bereich der Gesamtfläche, mit dem stets näheren Platzieren von Punkt P zum Rand der Fläche, nichtlinear kleiner wird. Graphik 18 zeigt nun den unterschiedlichen gravitativen Kräfteanteil von 10 Einzelflächen (die der oberen und unteren Halbkugel wurden aus Gründen der Symmetrie zusammengefasst.), dargestellt durch die farbigen Kurven. Die pinkfarbene Kurve stellt die gravitative Kraft auf Punkt P in der Mittelfläche dar. Und nur diese Kurve ist für die Flächenbetrachtung relevant. Würde man alle Kurven addieren, so erhält man wieder den linearen Anstieg der Kurve innerhalb der ganzen Kugel, wie in der Graphik 7und 11 dargestellt.

Außerhalb der massiven Mittelfläche nimmt die Gravitation für Punkt P bei der diskreten Berechnung auch quadratisch ab. Allerdings nicht in der gleichen Weise, wie das bei der Kugelberechnung der Fall war. Der gravitative Schwerpunkt (in der Fläche) liegt näher am Punkt P (bei der diskreten Berechnung), als der Mittelpunkt der Fläche, damit wird eine erheblich größere, gravitative Kraft auf Punkt P in der Fläche ausgeübt.

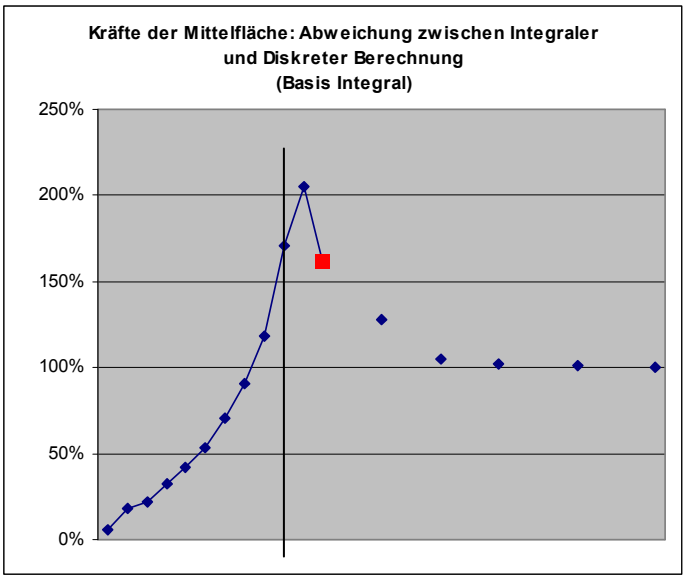


Die nebenstehende ***Graphik 19*** zeigt die berechneten gravitativen Kräfte innerhalb und außerhalb der massiven homogenen Fläche, die auf einen Punkt P ausgeübt werden. (Schematische Darstellung) Es gibt, durch die integrale und die diskrete Berechnung, keine Vergleichbarkeit der errechneten Kräfte.
Die pinkfarbene Kurve zeigt die gravitativen Kräfte, die auf einen Punkt P wirken, nach der diskreten Berechnung. Die blaue Kurve zeigt im Unterschied dazu die gravitativen Kräfte, die auf einen Punkt P wirken, nach der integralen Berechnung.
Die Gegensätzlichkeit der unterschiedlichen Berechnungs-Arten tritt, in der gravitativen Kräfteberechnung, mehr als deutlich zutage.

Gegenüberstellung der gravitativen Kräfteberechnung im integralen Modell und im diskreten Modell

Die Integrale und die diskrete Rechenweise unterscheiden sich in der Massenfläche in allen Wertebereichen der Kraft F, der gravitativ wirkenden Masse M, und dem Abstand r. War bei der Kugelberechnung wenigsten noch die Gravitationskraft F in beiden Rechenmodellen gleich, so ist das bei der Gravitationsberechnung für die massive, homogene Fläche nicht mehr der Fall.

Die erhebliche Abweichung zwischen der integralen und der diskreten Gravitationsberechnung in der Fläche wird durch die folgende Graphik dargestellt.



Graphik 20 *Die prozentuale Abweichung der diskret errechneten Gravitation von der Integralen Berechnung für die massive Fläche. (Basis 100% integrale Berechnung)*

(Werte entnommen aus der EXCEL Modelldatei KOKUG10…..)

Die 100% Linie in dieser Graphik stellt die Kräfte der durch die Integrale Berechnung ermittelten Werte dar. Alle Werte, die über die 100% Marke hinausgehen, zeigen an, dass durch die diskrete Berechnung die Kraft, die auf P ausgeübt wird im Randbereich der Fläche einen höheren Wert hat, als der durch die integrale Berechnung gefundene Wert. Im zentrumsnahen Bereich der Fläche verhält es sich mit der gravitativen wirkenden Kraft auf den Punkt P genau andersherum, hier ist die Gravitation, nach der diskreten Rechenmethode ermittelt, mehrfach geringer, als die Gravitation, die nach der integralen Methode berechnete Werte.

Im Inneren der massiven homogenen Fläche, nahe dem Zentrum, sind die diskret errechneten Werte für die Gravitation erheblich niedriger als die integral errechneten Werte. Verschiebt man den Punkt P in Richtung Flächenrand, so nimmt die Gravitation in der diskreten Berechnung stärker zu, als bei der integralen Berechnung, um dann am Rand den doppelten Wert der gravitativen Kraft zu erreichen,

(Die Einzelpunkte in der Graphik stellen unterschiedliche Entfernungen vom Mittelpunkt der Fläche dar, links beginnend mit 1 bis zur senkrechte Linie, dem Rand der Fläche, wo der Wert 10 erreicht wird. Im Punkt 11 wird die größte Gravitation erreicht, weil hier im diskreten Modell erstmalig alle Massen der Fläche gravitativ auf Punkt P wirken können. (Die Rasterung verhindert dies noch im Punkt 10) Der rote Punkt (nur zur Orientierung rot eingefärbt) markiert eine Position außerhalb der Fläche mit Abstand 12, gefolgt von 15, 30, 45, 60 und 100)

Außerhalb der homogenen Masse-Fläche nimmt dann die Gravitation quadratisch ab, ohne aber den, nach der integralen Rechenmethode ermittelten, niedrigeren Wert der Gravitation je zu erreichen. Das heißt, dass die Gravitationskraft im diskret gerechneten Modell außerhalb der Fläche, auch bis zu größeren Abstände hin, stets einen höheren Wert erreicht als bei der integralen Rechenweise.

Fazit: Die nach der integralen, zentrumsbezogenen Methode ermittelten Werte der gravitativen Kräfte für eine Hohl- und Vollkugel sind falsch.**

** (Hinter dieser Berechnungsmethode verbirgt sich die Zusammenfassung der Massen, die sich in einer homogenen massiven Kugel (auch Hohlkugel) oder einer homogenen massiven Fläche (auch Hohlfläche) befinden, zu einer Punktmasse im Mittelpunkt dieser Kugel oder dieser Fläche. Das Integrale Zusammenfassen der Kugelmassen im Kapitel 2 dieser Arbeit geschieht zwar augenscheinlich über die Potentiale und damit scheinbar über die gravitativen Kräfte, entspricht aber letztlich doch nur dem linearen Zusammenfassen der Massen im Mittelpunkt der Kugel, wie es auch in der Statik üblich ist.)

Weitere Anwendung der diskreten Gravitationsberechnungen

Zwei deutliche Beispiele für die fehlerhafte Berechnung mittels der integralen, zentrumsbezogenen Berechnung liefern die Probleme, die mit den Entfernungsberechnung der *Pioneer Sonden* und der Lichtablenkung der galaktischen *Gravitationslinsen* auftreten.

Die abgebremste Pioneer Sonde

In diesem Umstand der fehlerhaften Berechnung liegt also eine mögliche und sehr wahrscheinliche Erklärung für das unerwartete, zögerliche sich Entfernen der beiden *Pioneer Sonden* aus dem Sonnensystem. Gibt man die Planetenmassen unseres Sonnensystems (evt. auch die Masse der Oortschen Wolke, was eine weitgehende Konstanz der Geschwindigkeit bewirken würde) in das diskret rechnende Excel- Modell ein, so erhält man in der Entfernung der Pioneer Sonde zur Sonne eine um 0,0064%[6] erhöhte Gravitation gegenüber dem integralen, zentrumsbezogenen Rechenmodell.[7]
Dies würde die rätselhafte „Bremswirkung“ erklären, die die Pioneersonde erfährt. Es braucht also keine neue Energie postuliert zu werden, wie im genannten Artikel befürchtet, die gute alte newtonsche Gravitation, mit der richtigen (diskreten!) Rechenmethode, reicht zur Erklärung des Phänomens völlig aus.

Zu schwache Gravitationslinsen

Auch die Eigenschaft ferner galaktischer *Gravitationslinsen* , das Licht stärker als erwartet abzulenken ist jetzt problemlos erklärbar. Der über die integrale Rechenmethode ermittelte zu niedrige (weil fehlerhafte) Wert der Gravitation reicht nicht aus, um die Ablenkung des Lichtes der dahinter liegenden Galaxien zu erklären. Das ist nur zu verständlich. Der mehr als doppelt so hohe Wert der Gravitation am Rand der Galaxie, der bei der diskreten Flächenberechnung herauskommt, sollte zur Ablenkung des Lichtes durch die als Gravitationslinse wirkende Galaxie hingegen ausreichen.

Zwei beobachtbare, bisher unerklärliche Phänomene wären damit, ohne die Annahme einer zusätzlichen dunklen Materie, aber mit einer richtigen Berechnung, erklärbar.

Fragliche dunkle Materie

Mehr noch als bei der integralen Kugelberechnung tritt der Fehler bei der integralen Flächenberechnung eklatant zu tage.
……Versucht man bei einer fernen flächenhaften Galaxie ihre Masse über die visuelle Umlaufgeschwindigkeit der sie umrundenden Massen zu bestimmen, so wird mit der integralen, zentrumsbezogenen Berechnung in der Fläche zwangsläufig eine erheblich zu große Masse herauskommen. Dieser Rechenfehler führt dann unausweichlich zu der irrigen Annahme einer nicht

[6] Der errechnete Wert hat eine relative Toleranz von 1% auf die errechnete Differenz, entsprechend + - o,oooo32 % auf den Ausgangswert

[7] Diesen Artikel findet man auf NZZ Online unter: http://www.nzz.ch/2002/10/30/ft/page-article8GG6N.html

sichtbaren dunklen Materie. Siehe auch den Vergleich zwischen Integraler und diskreter Berechnung in einer weiteren Arbeit hier im Forum…… [8]

6. Literatur Zusammenfassung

Ableitung stark angelehnt an die Themenbehandlung im 1. Teil der Reihe „Fundamental University Physics“ von Alonso & Finn
Deutsche Fassung: M. Alonso/ E.J.Finn, Physik 3. Auflage (2000) Oldenboerg Verlag S. 318ff Die Gravitation eines kugelförmigen Körpers

„ Das Mehrkörperproblem in der Berechnung einer Galaxie und der Virialsatz und seine Anwendung“ M. Krause 3/2005

„Der Vergleich von integraler und diskreter Berechnung bei der galaktischen Massenbestimmung.“ M. Krause 3/2005

Den Artikel zur Pioneer Sonde findet man auf NZZ Online unter:
http://www.nzz.ch/2002/10/30/ft/page-article8GG6N.html

EXCEL Modelldatei KOKUG10…..(Es ist geplant die Datei so weit zugänglich zu machen, das man Daten eingeben und auch abfragen kann.)

7. Danksagung

An dieser Stelle möchte ich sehr herzlich jenem Doktor der Physik danken, der mir freundlicherweise in niederländisch abgefassten Unterlagen über die integrale Berechnung der Gravitation in kugelförmigen Körpern zur Verfügung gestellt hat. Durch den Briefwechsel mit ihm sind mache Ungereimtheiten im Integralen Rechenmodell noch deutlicher geworden. Er möchte nicht namentlich erwähnt werden, da er nicht hinter dieser Arbeit steht, wofür ich menschlich großes Verständnis habe.

[8] „Der Vergleich von integraler und diskreter Berechnung bei der galaktischen Massenbestimmung.“ M. Krause 3/2005