Das Mehrkörperproblem in der Berechnung einer Galaxie und der Virialsatz und seine Anwendung

ausgearbeitet von: Dpl. Ing. Matthias Krause, Kirchzarten, den 12.4.2005 (letzte Änderung: 17.12.2006)
Copyright: Alle Rechte bleiben allein dem Verfasser vorbehalten. www.kosmoskrau.de

Untertitel:

Die Lösung des Mehrkörperproblems durch diskrete Berechnung

Zielsetzung

Dieser Aufsatz möchte den Zusammenhang zwischen dem Virialsatz und den zur Berechnung einer Galaxienmasse relevanten Größen aufzeigen. Es soll dabei auf mögliche Fehlerquellen hingewiesen werden.

Besondere Beachtung wird in diesem Zusammenhang eine Galaxiendarstellung als Excelmodell erfahren, mit dessen Hilfe eine diskrete Kräfte- und Umlaufgeschwindigkeitsberechnung erfolgen kann. Anschließend werden die berechneten Werte im Zusammenhang mit dem Virialtheorem untersucht und kurz diskutiert.

1. Grundlegendes zur Berechnung

Der Virialsatz[1] wird bei der Massenberechnung von Galaxien und anderen größeren Massenansammlungen eingesetzt. Mit seiner Hilfe können die Massenmengen in einer fernen Galaxie bestimmt werden. In die gegebenen Formeln werden die richtigen Massenwerte, die Umlaufgeschwindigkeiten und die richtige Entfernung zwischen den beiden Massen eingegeben. Dies hört sich selbstverständlich an, ist aber bei Galaxien nicht ganz unproblematisch. Galaxien sind mathematisch gesehen eine Vielkörperansammlung. Bei der Berechnung ist deshalb stets darauf zu achten, daß nur die Werte in die Formeln eingesetzt werden, die für die Ausrechnung relevant sind. Die Werte müssen im direkten gravitativen und nicht scheinbar visuellen Abhängigkeitsverhältnis zueinander stehen. Zur Verdeutlichung des Gesagten folgt eine Graphik.

2. Beispielgraphik (Graphik 1 auf der folgenden Seite)

2.1 Erste Betrachtung zur Beispielgraphik

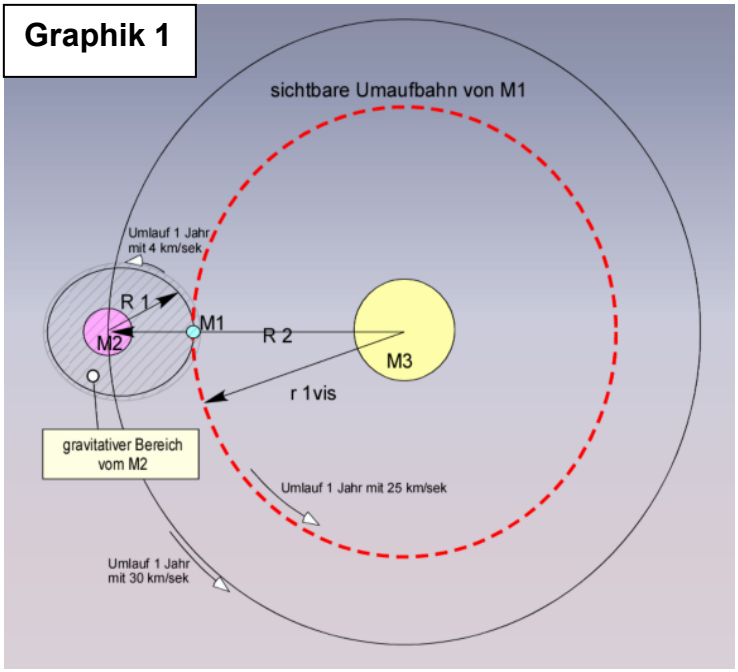
Die in dieser Graphik dargestellte Masse M1 soll die zu betrachtende Beispielmasse sein, an der dargestellt werden soll, dass eine visuelle Bahn eines Körpers nicht notwendigerweise auch die gravitative Bahn sein muß. Diese Masse M1 befindet sich im gravitativen Wirkungsbereich von M2. Ein Umlauf von M1 um M2 soll genau 1 Jahr dauern. Die Bahngeschwindigkeit soll bei gemessenen 1 km/s liegen, bei einem mittleren Bahnradius von R1.

Mit dem Virialsatz würden in diesem Beispiel die geforderten Energieverhältnisse zwischen W_{kin} und W_{pot} von M1 exakt zu berechen sein.

2.2 Zweite Betrachtung zur Beispielgraphik

Von M3 aus gesehen läuft M2 auf einer Bahn, die zu einer Umrundungsdauer von genau einem Jahr führt. Die Umrundung findet mit einer Geschwindigkeit von 30 km/s und mit einem Radius von R2 statt. Auch bei dieser Betrachtung würden die vom Virialsatz geforderten Energieverhältnisse in Bezug auf M2 zu berechen sein.

[1] Sterne und Weltraum 1/2005 s.44 / und als weiterer Hinweis:
Der Virialsatz und seine Anwendung, M. Krause 2005



2.3 Dritte Betrachtung zur Beispielgraphik

Wird nun angenommen, das die Masse M1 die Masse M2 in einem Jahr umrundet und M2 gleichzeitig die Masse M3 in ebenfalls einem Jahr umrundet, dann „verharrt" M1 während seines Umlaufs stets genau zwischen M2 und M3.
M1 umrundet scheinbar M3 auf der rot gestrichelten Bahn, mit dem visuellen Radius von $r_{1\,vis}$.
Die Umlaufgeschwindigkeit von M1 um M3 liegt wegen des kleineren Radius von r_{1vis} (bei gleicher Gesamtdauer) unter der Umlaufgeschwindigkeit von M2 um M3 mit dem größeren Radius von R2. Beide Umlaufbahnen werden trotz der unterschiedlichen Radien in der gleichen Zeit von genau einem Jahr durchlaufen! Die innen laufende Masse M1 sollte in Bezug auf M3 eigentlich in einer kürzeren Zeit und mit einer höheren Geschwindigkeit als M2 um M3 laufen. Das tut M1 aber nicht. Der Grund liegt in der gravitativen Bindung von M1 an M2 und nicht an M3.
Als Ergebnis erhält man demnach eine langsamer auf der Innenbahn laufende (25km/s) Masse M1 von M3 aus betrachtet als die auf der Außenbahn schneller (30km/s) laufende Masse M2. (Der Satellit SOHO, der zur Sonnenbeobachtung dient, läuft auf einer solchen Librationsbahn) Man erhält eine scheinbare visuelle Umkehrung der Umlaufgeschwindigkeit von M1 und M2 in Bezug auf die Zentralmasse M3. Würde man nun bei bekannter Masse M1 mit der Umlaufgeschwindigkeit von 25km/s und dem Radius r_{1vis} versuchen, unter Zuhilfenahme des Virialsatzes, die unbekannte Masse von M3 zu bestimmen, so wäre das Ergebnis in jedem Fall fehlerhaft. In diesem Fall hätte M3 eine viel zu kleine Masse.
Die resultierende Bewegung, in „Neumondposition" (von M2 aus gesehen), von M1 auf der Bahn mit dem Radius $r_{1\,vis}$ ist in diesem Fall, wie in der Graphik dargestellt, die Differenz der beiden Radien R1 und R2.
$r_{1\,vis.} = R2 - R1$

Befindet sich die Masse M1 außerhalb von M2, an der „Vollmondposition", so lautet die Formel für
$r_{2\,vis.} = R2 + R1$

In dieser Außenposition würde die Masse von M1 schneller (35km/s) als M2 um M3 laufen. Dieser Fall ist in der graphischen Darstellung nicht aufgeführt, sei aber an dieser Stelle der Vollständigkeit halber erwähnt. Der Mittelwert der beiden extremen Geschwindigkeiten von M1 ergibt übrigens den genauen Umlaufwert von M2. M2 ist ja das gravitative Zentrum von M1
(35+25)/2= 30
Obwohl sich die Masse von M1 mit 25km/s (bzw. mit 35 km/s) um die Masse M3 bewegt, hat sie doch nur eine wahre gravitativ gebundene Umlaufgeschwindigkeit von 1 km/s um die Masse M2.
Es ist demnach die Dauer eines Umlaufs in allen Fällen gleich lang, nur die Geschwindigkeit ist, aufgrund der unterschiedlichen Radien, sehr unterschiedlich.

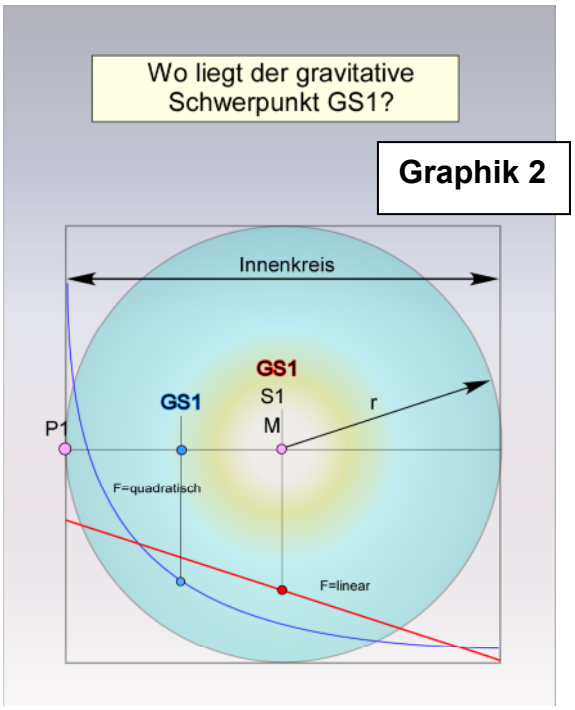
2.4 Vierte Betrachtung zur Beispielgraphik
Es gibt einen denkbaren Fall, der Anlass bieten würde, sich der falschen Werte ($r_{1\,vis}$ und v =25km/s) zu bedienen und man würde nicht bemerken, dass ein fehlerhaftes Ergebnis vorliegt. Dieser Fall würde eintreten, wenn Die Masse M2, als eigentlicher gravitativer Drehpunkt von M1, unsichtbar wäre. (z.B. ein schwarzes Loch oder ein nicht sichtbarer gravitativer Drehpunkt, der von mehreren Massen erzeugt wird.)

Kurzzusammenfassung
Bei der Berechnung einer gravitativ wirkenden Masse - mittels Virialtheorem - ist unbedingt darauf zu achten, dass nur die zum gravitativen Bezugssystem gehörenden Größen zur Anwendung kommen. Eine scheinbare - nur Visuelle - Zugehörigkeit zu einem Bezugssystem, legitimiert nicht die

Verwendung der dazugehörenden Berechnungsgrößen. Das gedankliche Beispiel oben kann und sollte natürlich nicht zum Vergleich mit den gravitativen Verhältnissen in deiner Galaxie dienen, es sollte aber deutlich veranschaulichen, das eine augenscheinliche Verknüpfung zweier Massen nicht auch eine tatsächliche gravitative Verknüpfung sein muß. In dem obigen Beispiel liegen die gravitativen Zuordnungen noch relativ klar, es handelt sich ja nur um 3 Massen und nicht um einige 10 Tausend Sonnenmassen, wie beispielsweise bei einer Galaxie. Aber auch und gerade hier stellt sich die Frage nach der richtigen Zuordnung der Werte. Wo liegt beispielsweise bei einer diskreten Massenberechnung der galaktischen Scheibe der gravitative Drehpunkt. Dieses soll in diesem Aufsatz mit einer diskreten Berechnung nachvollzogen werden.
Um gedanklich eine Galaxie zu überblicken, dürfte eine Rasterung der galaktischen Sonnenmassen sinnvoll sein.

3. Die Zusammenfassung von gravitativ wirkenden Massen

Unter dieser Überschrift sollen nun die Kriterien genannt werden, mit deren Hilfe es möglich ist, mehrere Massen sinnvoll zusammenzufassen. Grundlegend ist zu sagen, das sich, in der Gravitationsberechnung, die Massen selbst **nicht direkt** zusammenfassen lassen. Dies erscheint zunächst widersprüchlich, und doch ist es über einen Umweg möglich. Der Grund ist leicht einsichtig, wenn man mehrere unterschiedlich weit entfernte hintereinander liegende gleichschwere Massen versucht zu einer Masse zu vereinen. Bevor aber dieser Fall betrachtet wird, soll zunächst gezeigt werden, daß ein lineares Zusammenfassen von Massen im gravitativen Bereich nicht möglich ist. Dies ist nur in der Statik möglich. Zu diesem Zweck wird eine Massenfläche mit folgenden Vorgaben betrachtet.



Vorgabe: gleichmäßige Verteilung von Massen in der Fläche, alle Massen sind gleichschwer
Jede Masse wirkt gravitativ unterschiedlich auf P1 und die gravitativen Kräfte ändern sich mit der Entfernung nicht linear sondern quadratisch. Aus diesem Grund können auch die Innenmassen (Innenkreis) bei der integralen galaktischen Berechnung nicht linear im Zentrum zusammengefasst werden. Das nebenstehende Schaubild verdeutlicht, das beim Zusammenfassen aller Massen im Zentrum der gravitative Schwerpunkt (GS1 rot) sich im Zentrum befinden würde. Dies setzt eine lineare gravitative Kraft (F= linear) voraus, die es aber nicht gibt! (rote Linie)
Die Gravitation von Massen nimmt mit der Entfernung quadratisch ab (blaue Kurve) und der wahre gravitative Schwerpunkt (GS1 blau) liegt deshalb näher an P1 als das Zentrum. Bei dieser Betrachtung wird deutlich, das nicht die Massen in Bezug auf P1 zusammenfassbar sind, sondern nur die Kräfte der Massen. Das heißt, das zuerst die Kräfte der Einzelmassen errechnet werden müssen, mit denen diese Massen auf einen bestimmten Punkt (P1) wirken. (gleich in der Massengröße aber unterschiedlich in der Größe der Kraft und der Entfernung) Dann erst, nach der Einzelberechnung, können die Kräfte addiert und zusammengefasst werden.
Es gibt also zwei ungleiche Methoden (Modelle) der Zusammenfassung von Massen

1. Die **Integrale Zentrumsbezogene Berechnung**, die die Massen zusammenfasst[2] (wird fast ausschließlich in der Wissenschaft verwendet)[3]
2. Die **Diskrete, messpunktbezogene Berechnung**, die die Kräfte zusammenfasst.

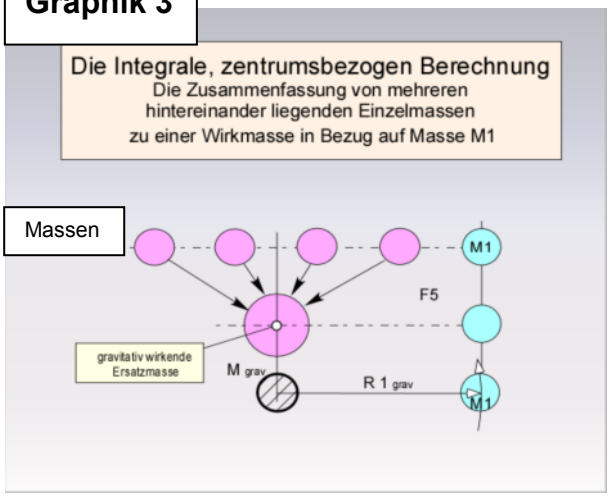
[2] Es erfolgt nur ein scheinbares Zusammenfassen über die gravitativen Kräfte, im Ergebnis kommt es aber einem einfachen Zusammenfassen der Massen im Zentrum des Körpers gleich.

[3] Masso , Eduard 1995; S2 und 3 http://www.arxiv.org /astro-ph/pdf9601/9601145.pdf

Wobei die erste Methode, wegen der Nichtlinearität der Gravitation, zu fehlerhaften Ergebnissen führt. Es bleibt für die korrekte Berechnung eines Mehrkörperproblems nur die 2. Methode der diskreten Berechnung.
Eine Beispielrechnung soll das nochmals verdeutlichen. Es sollen vier gleichschwere Massen zu einer gemeinsamen Wirkmasse zusammengefasst werden. Die Massen liegen hintereinander und weisen alle den gleichen Abstand voneinander auf. M1 soll die vier Massen zum Zeitpunkt t_0 umrunden. (ohne Bewegung) Dazu ist die Kraft und der Abstand vom Drehzentrum festzulegen.

1. *Die Integrale, zentrumsbezogene Berechnung:* Die violetten Massen werden addiert und im Massenschwerpunkt (Zentrum) der 4 Massen (m_2) zusammengefasst (integriert), so das der Radius den 2,5 fache Massenabstand zwischen M1 und der integrierten Zentrumsmasse m_2 aufweist.
Die Anziehungskraft (schraffierter Kreis) zwischen m_1 und m_2 errechnet sich nach der Formel

Graphik 3



$m_1 = 1$; $m_2 = 4$; $r = 2{,}5$

$$F = \frac{\gamma \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

$$F = \frac{\gamma \cdot 1 \cdot 4}{2{,}5^2} = \gamma \cdot \frac{4}{6{,}25} = \gamma \cdot 0{,}64$$

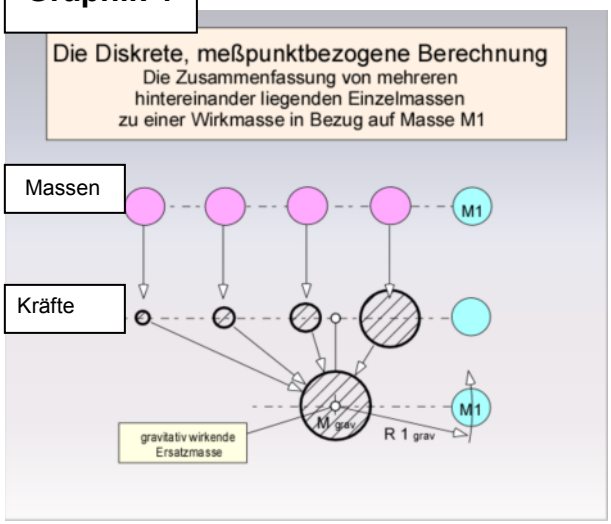
Damit liegen die Werte für den Radius und die Kraft, ermittelt durch die Integrale, zentrumsbezogene Berechnung, fest.

$$F = \gamma \cdot 0{,}64$$

und *R= 2,5* (Faktor Massenabstand)

2. Für *die Diskrete, meßpunktbezogene Berechnung* werden zuerst die Anziehungskräfte (schraffierte Kreise) zwischen den violetten Einzelmassen und M1 berechnet, anschließend werden diese Einzelkräfte (schraffierte Kreise) addiert und der gemeinsame Drehpunkt dieses Kräftezentrums, um das sich M1 drehen möchte, berechnet. (gilt nur für den Zeitpunkt t_o)

Graphik 4



$$F_1 = \frac{\gamma \cdot 1 \cdot 1}{1^2} = \gamma \cdot \frac{1}{1} = \gamma \cdot 1$$

$$F_2 = \frac{\gamma \cdot 1 \cdot 1}{2^2} = \gamma \cdot \frac{1}{4} = \gamma \cdot 0{,}25$$

$$F_3 = \frac{\gamma \cdot 1 \cdot 1}{3^2} = \gamma \cdot \frac{1}{9} = \gamma \cdot 0{,}1111$$

$$F_4 = \frac{\gamma \cdot 1 \cdot 1}{4^2} = \gamma \cdot \frac{1}{16} = \gamma \cdot 0{,}0625$$

$$F_{ges.} = \gamma \cdot (F_1 + F_2 + F_3 + F_4) = \gamma \cdot 1{,}4236$$

Berechnung des Radius

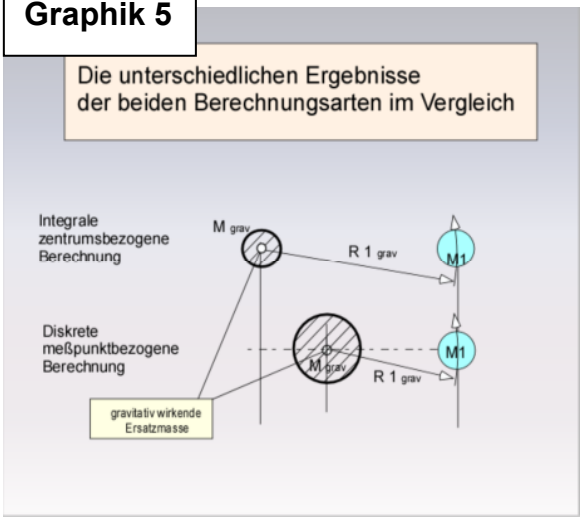
$$R1_{grav} = \left(F_1 \cdot R1 + F_2 \cdot R2 + F_3 \cdot R3 + F_4 \cdot R4 \right) / F_{ges}$$

$$R1_{grav} = F_1 \cdot 1 + F_2 \cdot 2 + F_3 \cdot 3 + F_4 \cdot 4 \quad / \gamma \cdot 1{,}4236 = \gamma \cdot 1 + \gamma \cdot 0{,}5 + \gamma \cdot 0{,}3333 + \gamma \cdot 0{,}25 \quad / \gamma \cdot 1{,}4236$$

$R1_{grav} = \gamma \cdot 2{,}0833 / \gamma \cdot 1{,}4236 = 1{,}4634$ (Faktor Massenabstand)

Vergleich man die Zahlenwerte der beiden Modelle miteinander, so zeigt sich, dass eine Integrale Berechnung zu völlig anderen Ergebnissen führt als eine diskrete Berechnung.

Graphik 5



1. Integrale Ber. : $R1_{grav}$ = 2,5 F=(M_{grav}) = 0,64

2. Diskrete Ber. : $R1_{grav}$ = 1,46 F=(M_{grav}) = 1,42
Rechnet man als Probe mit den integral bzw. diskret ermittelten Werten die Masse des jeweiligen Massenäquivalents aus, so erhält man nur bei der integralen Berechnung wieder die 4 Masseneinheiten der Ausgangsmassen.

$$F = \frac{\gamma \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2} \Rightarrow \text{Umwandeln nach } m_2$$

Es gilt für die integrale Berechnung:

m_2 = 0,64 * 2,5*2,5 = 4

Es gilt für die diskrete Berechnung:

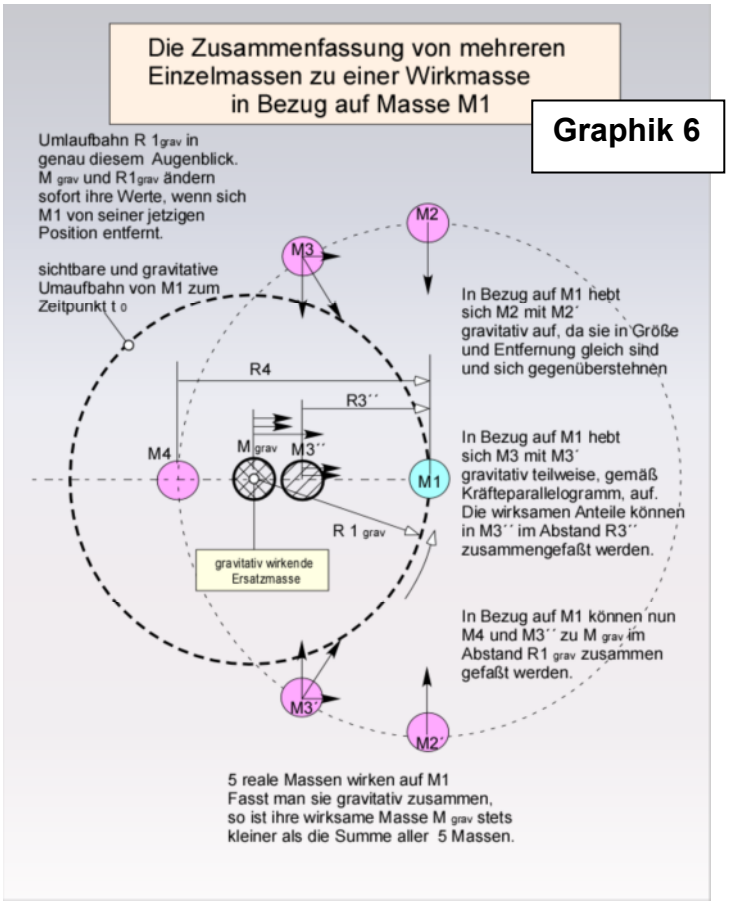
$$m_2 = \frac{F \cdot r^2}{\gamma \cdot m_1} = \frac{\gamma \cdot 1{,}4236 \cdot 1{,}4634^2}{\gamma \cdot 1} = 3{,}0487 \approx 3$$

Die Probe zeigt, dass die diskrete Berechnung nicht wieder zu den 4 Ursprungsmassen führt. Es sind nicht nur die Kräfte und Radien unterschiedlich, es sind auch die daraus berechneten Massen. Werden aber die gravitativen Kräfte, Massen und Radien der integralen Rechenweise in weiterführenden Berechnungen verwendet, so ergeben sich zwangsläufig Fehler. Die resultierende Umlaufgeschwindigkeit (für R = variabel) von M1 ist nach der Formel $v = \sqrt{\frac{\gamma \cdot (m_1 + m_2)}{r}}$

in der beiden Rechenmodellen zum Zeitpunkt t_0 unterschiedlich. Sie beträgt (als Faktor) im integralen Modell 1,41 und im diskreten Modell 1,68 .
Es handelt sich um eine Abweichung von 19,1%. Verstärkt werden diese Fehler, wenn in die Betrachtung auch Massen mit einfließen, die sich gegenseitig aufheben. Dies wird im Folgenden noch deutlich gezeigt. Es gilt deshalb:

Das Zusammenfassen von Massen kann nur indirekt über die Kräfte der Einzelmassen geschehen.

Graphik 6



Weder eine Addition der Massen, noch der linear ermittelte Massenschwerpunkt aller Massen können und dürfen zur weiteren korrekten Berechnung verwendet werden. Die Ursachen der Kräfte sind natürlich die jeweiligen Massen mit ihren jeweiligen Entfernungen. Bei der weiteren Betrachtung sind deshalb beim Zusammenfassen von Massen immer die Kräfte der Massen gemeint.

Es gibt 3 grundlegende Kriterien, die bei dem gravitativen Zusammenfassen von Einzelmassen (Die Kräfte derselben) zu beachten sind. Es sind dies im Einzelnen

1. die gravitative Kräfteaufhebung von sich gegenüberliegenden Massen

2. die gravitative Kräfte-reduzierung gemäß Kräfte-parallelogramm von nebeneinander liegenden Massen

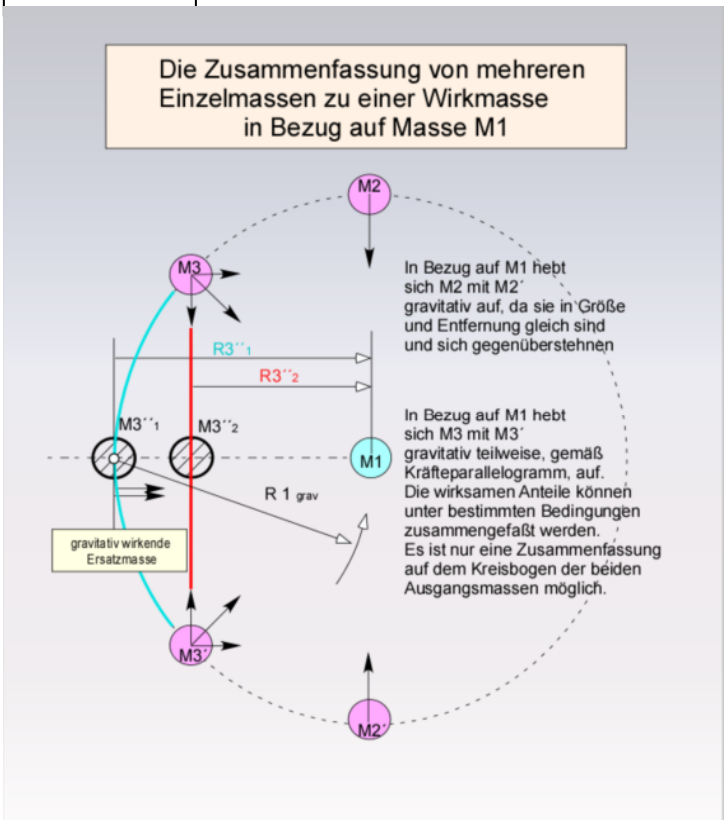
3. die gravitative Kräfteveränderung von hintereinander liegenden Massen je nach Entfernung.

Die zusammenzufassenden Massen selbst verändern ihren Wert natürlich nicht, es handelt sich bei der zusammengefassten Masse immer um ein Massenäquivalent, das gravitativ auf den zu berechnenden Körper M1 wirkt. Dieses gravitativ wirkende Masseäquivalent ($M_{grav.}$) hat auch eine bestimmte Entfernung von der gravitativ beeinflussten Masse M1. Diese Entfernung soll dann $R_{grav.}$ genannt werden.
Die Graphik 6 zeigt, das sich M2 und M2´ -in Bezug auf M1 zum Zeitpunkt t_0 - gravitativ (=kräftemäßig) gegenseitig aufheben.

1. Die Kräfte zweier sich gegenüberliegender (Winkel 180°) gleichgroßer Massen mit gleicher Entfernung zu einem Punkt M1 heben sich gegenseitig auf. Zwei ungleich große Massen, mit gleicher Entfernung zu Punkt M1, subtrahieren sich in ihren Kräften. Die Differenz bleibt als Kraft und Richtung (Vektor) erhalten. Der Radius bleibt unverändert.

Die Kräfte der Massen M3 und M3´ werden – in Bezug auf M1 - in dem Massenäquivalent M3´´ gemäß Kräfteparallelogramm im Abstand R3´´ zusammengefasst.(, rot dargestellt in der nächsten Graphik 6a) R3´´ ist in diesem Beispiel (Graphik 6) absichtlich rechwinklig zusammengefasst in Bezug auf M1, um das spätere Zusammenfassen von M4 und M3´´ leichter zu demonstrieren. Der richtige Abstand von R3´´ wäre gleich R4 und das entspräche einer Kreisbogenzusammenfassung der Kräfte.
Die folgende Graphik 6a zeigt nun den Unterschied zwischen der rechtwinkligen und der kreisbogenförmigen Zusammenfassung der beiden Teilmassenkräfte auf.
Die Kräfteanteile dieser beiden Einzelmassen M3 und M3´, die auf M1 wirken, werden addiert. Die kreisbogenförmige Zusammenfassung (blau dargestellt) ist die korrektere Variante zum Zusammenfassen von Einzelmassen. Die graphische Darstellung 6a zusammen mit einer einfachen Rechung verdeutlicht dies.

Graphik 6a



Berechnung der Teilkräfte am Beispiel M3 uns M3´ in Bezug auf M1 bei einem Winkelabstand der beiden Massen zur Symmetrielinie von 45° (hälftige Aufteilung)
Die Kraft, die M3 und M3´ jeweils auf M1 ausüben sei 1 N.
Würden beide Massen unmittelbar nebeneinander stehen, so würden sich ihre beiden Kräfte zu beinahe 2 addieren. Da sie aber unter einem Winkel von 90° , von M1 aus gesehen, stehen, wirkt nur ein Teil ihrer Kraft auf M1 gemäß Kräfteparallelogramm.

$$F_{Teil} = \sqrt{F^2_{M3ges.} - F^2_{Teil}}$$

$$F_{Teil} = \sqrt{1^2 - 0{,}71^2} = 0{,}71$$

Der gleiche Wert gilt auch für M3´und deshalb wird der Wert von 0,71 auf 1,42 verdoppelt.

Rechtwinklige Zusammenfassung: Der Abstand zwischen M1 und $M3''_2$ verringert sich beim rechtwinkligen Zusammenfassen und beträgt nur noch den 0,71 fachen Radius der ursprünglichen Entfernung der Massen M3 und M3´. Rechnet man die Kraft in ein Massenäquivalent um, so erhält man einen Wert, der kleiner ist als die Hälfte beider Massen. Der Wert liegt nur noch bei 35,8% der Ursprungsmassen.

$$m_2 = \frac{F \cdot r^2}{\gamma \cdot m_1} = \frac{\gamma \cdot 1{,}42 \cdot 0{,}71^2}{\gamma \cdot 1} = 0{,}716$$

Kreisbogenförmige Zusammenfassung:
Faßt man die Teilkräfte der Massen kreisbogenförmig zusammen, so erhält man als Massenäquivalent $M3''_2$ einen doppelt so hohen Wert, wie bei der rechtwinkligen Zusammenfassung

$$m_2 = \frac{F_{ges} \cdot r^2}{\gamma \cdot m_1} = \frac{\gamma \cdot 1{,}42 \cdot 1^2}{\gamma \cdot 1} = 1{,}42$$

Dieser Wert entspricht der zu erwartenden hälftigen Kräfteaufteilung, er liegt bei 71% der Ursprungsmassen.

2. Die Kräfte zweier nebeneinander liegender (Winkel < 180°) gleichgroßer Massen mit gleicher Entfernung in Bezug auf M1 heben sich gegenseitig teilweise, gemäß Kräfteparallelogramm, auf. Die verbleibenden Kräfte werden addiert und in einem Punkt mit gleichem unverändertem Radius kreisbogenförmig zusammengefasst.

Es wird zum Abschluß (Graphik6) noch die Kraft der Masse M4 mit dem Massenäquivalent, der Kraft von M3´´ zu einem gemeinsamen Massenäquivalent oder der Kräftesumme M_{grav} zusammengefasst. Diese Kräftesumme könnte nun in die gravitative Wirkmasse umgerechnet werden. Die Kraft der Masse M4 wirkt auf Grund ihrer größeren Entfernung von M1 geringer als die Kraft von M3´´ . Die beiden grav. Kräfte von M4 und M3´´ sind zu addieren, so erhält man das gravitative Massenäquivalent von M_{grav} .

3. Die Kräfte zweier hintereinander liegender (Winkel = 0° in Bezug auf M1) Massen mit ungleicher Entfernung zu M1 werden addiert. Zur Ermittlung des Abstandes $R1_{grav.}$ werden die jeweiligen Einzelkräfte mit den dazugehörigen Massenentfernungen multipliziert. Diese Produkte werden addiert und die Summe beider Produkte durch die Kräftesumme geteilt. Als Ergebnis erhält man den Radius des gemeinsamen Kraftzentrums.

Die folgende Formel ist zur Bestimmung von $R1_{grav}$ geeignet:

$$\frac{\left(F_{M4} \cdot R_4 + F_{M3''} \cdot R_{3''} \right)}{\left(F_{M4} + F_{M3''} \right)} = R_{1grav.}$$

Nachdem M grav und R1grav nun berechenbar sind, könnte überprüft werden, ob der Virialsatz, in Bezug auf M1, erfüllt wird.
Das Dreikörperproblem (Vielkörperproblem) in der Physik kann durch diese diskrete Art der Berechnung und Zusammenfassung der Kräfte der Einzelmassen gelöst werden. Da es sich bei der diskreten Berechnung einer galaktischen Scheibe um eine sehr große Anzahl von Einzelberechnungen handelt, die dann zusammengefasst werden müssen, bietet sich für die Berechnung eine entsprechende EXCEL Datei an.

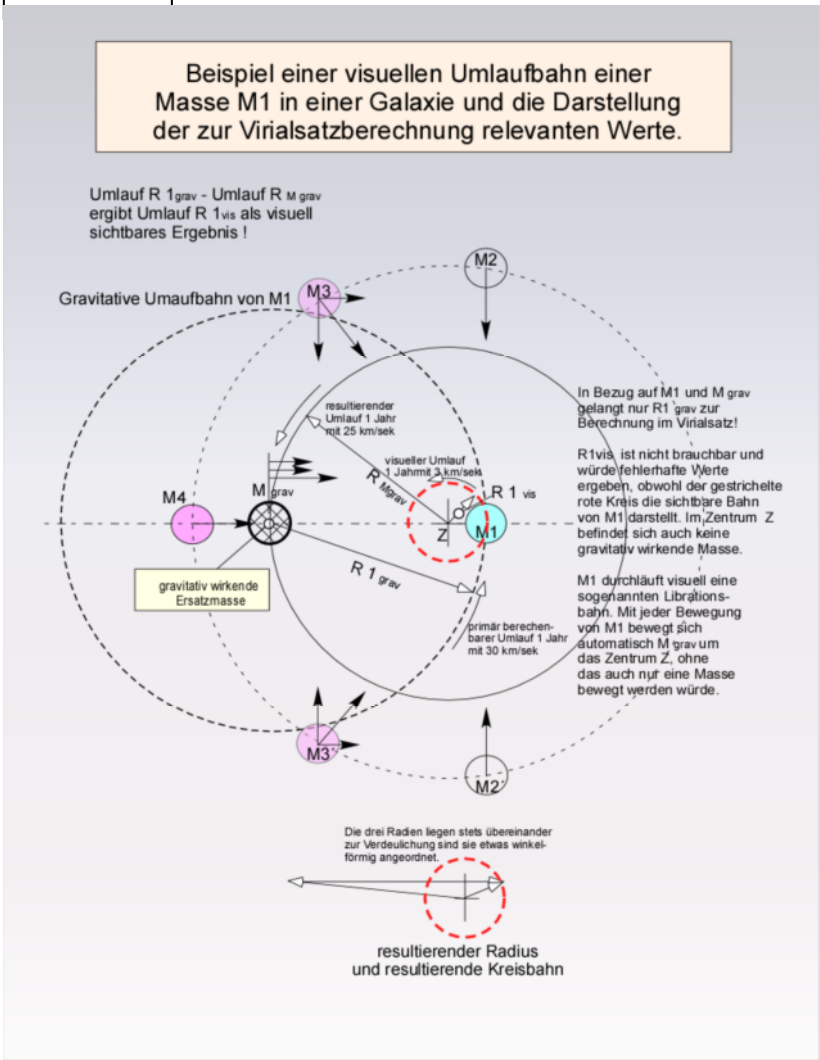
Die obige Darstellung der Kräftezusammenfassung wird nun in einen galaktischen Rahmen gestellt. Die bisherigen Voraussetzungen sollen dabei unverändert bleiben. Damit bleiben auch die Ergebnisse zunächst invariant. Die Voraussetzung dafür ist die absolut gleichmäßige Massenverteilung in der galaktischen Fläche. Dadurch wird ein sich gegenseitiges Aufheben der Kräfte der jeweils gegenüberliegenden, gleichschweren und gleichweiten Sonnenmassen erreicht. Dies ist zur Verdeutlichung der Bewegungsabläufe wichtig. (Die Massenzunahme zum Zentrum einer Galaxie hin, wie in der Realität üblich, würde den zu beschreibenden Effekt nicht in der gebotenen Deutlichkeit hervortreten lassen.)

4. Eine galaktische Beispielgraphik

Der Unterschied zur Graphik Nr.6 besteht jetzt einzig darin, das weitere gleichschwere Massen, in einer galaktischen Anordnung, mit in die Betrachtung einfließen.
Alle Massen rechts von M1 (einer gedachten Linie M2 – M2´ bis zur gestrichelten Linie) heben sich gravitativ (kräftemäßig) mit den entsprechenden Massen links von M1 auf. Die Masse M1 befindet sich für alle *diese* Massen im Zentrum, weshalb sich keine Kraftwirkungen ergeben können. Da aber M1 etwas rechts der galaktischen Mitte steht, bleiben gravitativ gesehen nur am linken Rand der Galaxie die schon aus der vorherigen Graphik bekannten Massen zur weiteren Betrachtung übrig.

Wird M1 nun in Bewegung gesetzt, so rotiert M1 um M_{grav} im Abstand $R1_{grav}$ mit der Geschwindigkeit V_{grav} auf der kräftig gestrichelten Bahn (nur diese Werte können in der Virialsatzberechnung Berücksichtigung finden).

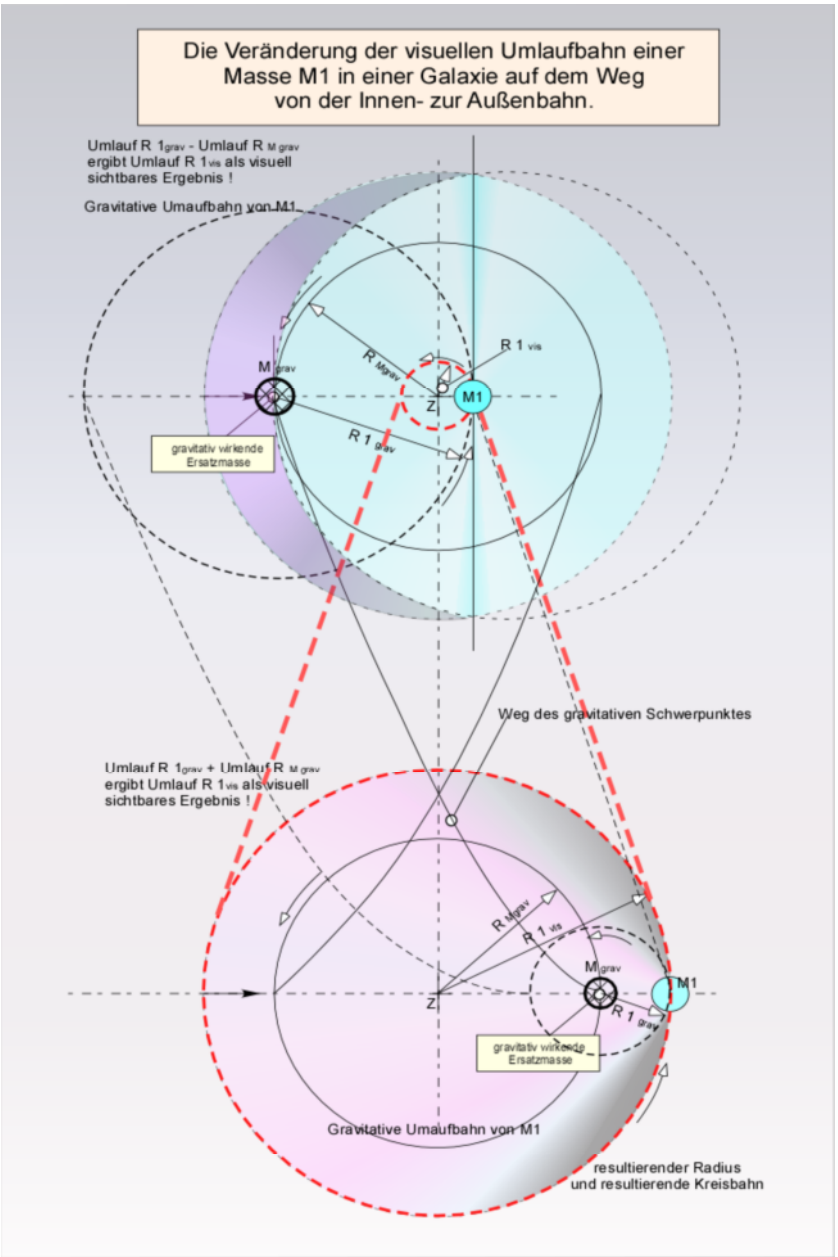
Graphik 7



Gleichzeitig „rotiert“ aber M_{grav} (Massenäquivalent der Kräfte) entgegengesetzt (phasenverschoben um 180° aber richtungsgleich) zu M1 auf einer Kreisbahn mit $R_{M\,grav}$ um das galaktische Zentrum. Es handelt sich **nicht** um einen realen Massentransport, sondern nur um eine äquivalente (Wirkmassen) Kräfteverschiebung. Je weiter sich M1 bewegt, desto mehr andere reale Massen bilden die stets gleich bleibende Kräftesumme (Wirkmasse) M_{grav} und die bisherigen realen Massen verlieren ihren gravitativen Einfluß. Gleichzeitig rotiert M1 aber auch visuell als resultierender Umlauf um das galaktische Zentrum. Dort befinden sich **keine** gravitativ wirksam werdenden Massen (rot gestrichelter Kreis) Diese Bewegung ist die mit Abstand langsamste unter den drei gleichzeitig und gleichlang ablaufenden Bewegungen. Nur diese Bewegung von M1 um das galaktische Zentrum ist sichtbar zu verfolgen. Der Radius $R1_{vis}$ der visuellen Kreisbahn von M1 errechnet sich durch die Subtraktion von $R1_{grav}$ und R_{Mgrav}. Im unteren Teil der Graphik wird diese Subtraktion etwas winkelversetzt dargestellt, um das ganze etwas anschaulicher zu machen. Möchte man R_{vis} für eine Randmasse berechnen, so rechnet man wie folgt:

$R_{vis} = R_{M\,grav} + R1_{grav}$.

In der folgenden Graphik wird je eine Innen und eine Außenbahn als M1 dargestellt, sowie der Weg dieser Masse von der Innen- zur Außenbahn. (in einer Massefläche mit gleichgroßen Massen!)

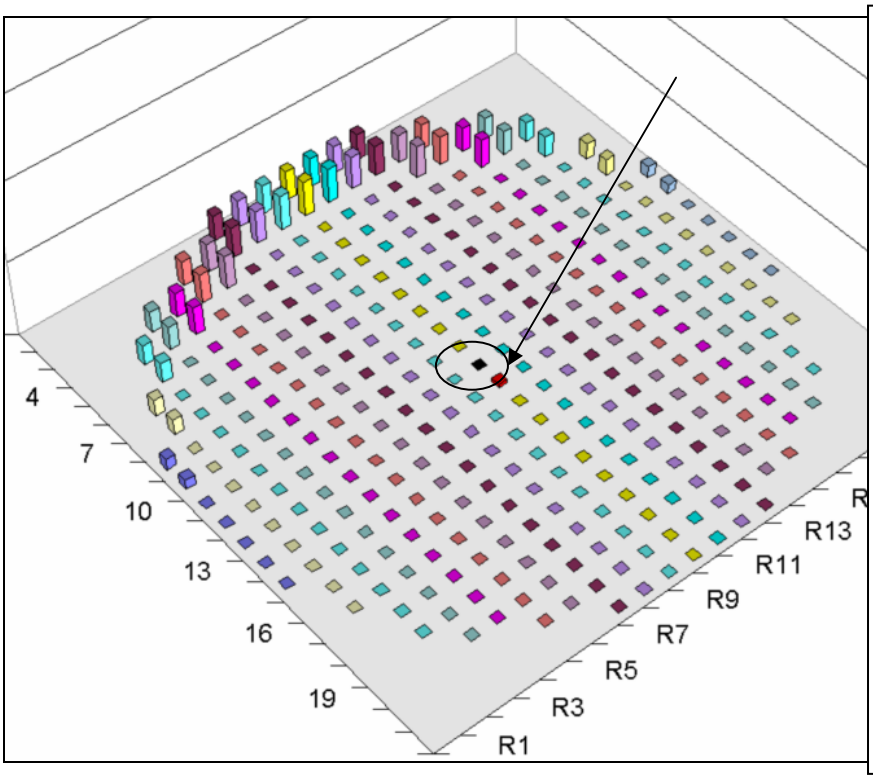


Graphik 8
Die Darstellung einer Masse M1, die nahe dem galaktischen Zentrum auf einer Librationsbahn visuell um das Zentrum läuft. (obere Teil der Graphik)
Und die Verschiebung der Drehpunkte bis zum Umlauf einer Randmasse M1 auf einer Librationsbahn um das galaktische Zentrum (untere Teil der Graphik)
Alle Massen in der Galaxie bewegen sich visuell auf Librationsbahnen.

Es ist deutlich zu sehen, dass die Bewegungsabläufe sich von Messpunkt zu Messpunkt (wenn diese vom Zentrum Richtung Rand betrachtet werden) verändern und wesentlich komplizierter sind, als wenn alle anziehenden Massen im Zentrum vereint wären. Zumal der wirkliche gravitative Drehpunkt von M1 auf der zentrumsnahen visuellen Innenbahn weit außerhalb des Innenkreises von M1 liegt.
Entsprechend der bisherigen Erkenntnis ist eine zentrumsbezogene Berechnung mit einer vereinfachenden Integralformel nicht mehr möglich, wie das in der Literatur nur mit einer Integralformel oft beschrieben wird.[4] Es gibt aber noch einen weiteren Grund, warum nur noch diskret gerechnet werden kann. Im galaktischen Zentrum, wie in der gesamten galaktischen Fläche, befinden sich, in diesem Beispiel, zwar Massen aber es sind nicht alles gravitativ wirkende Massen, um die M1 (auf der Innenbahn) kreisen könnte. Der gesamte, hellblaue, nahezu kreisförmige Bereich im oberen Teil des Bildes stellt die sich gegenseitig aufhebenden Kräfte der Massen in Bezug auf M1 dar.

[4] Das Zentrum der Galaxis S.41 Suw Spezial 2/2004

Der gesamte Innenkreis der visuellen Umlaufbahn von M1, mit den darin enthaltenen Massen, ist , bei Massengleichheit in der galaktischen Fläche, gravitativ ohne jeden Einfluß auf M1!
(Siehe auch die nachfolgende Graphik Nr.9) Es ist deshalb leicht einzusehen, dass eine <auf das galaktische Zentrum bezogene> Berechnung von M1, wegen der gravitativ nicht wirksam werdenden Massen im Innenkreis, fehlerhaft wäre. Der gravitative Schwerpunkt einer jeden zu betrachtenden Masse im galaktischen System muss stets neu bestimmt werden, und liegt nur für einen einzigen Fall im Zentrum der Galaxie, nämlich nur dann, wenn der Weg des gravitativen Schwerpunktes das Zentrum überkreuzt.
Gleichweit entfernte Massen vom Zentrum der Galaxie haben einen gleichweit entfernten gravitativen Drehpunkt, es gilt Rotationssymmetrie. (Würden die Massen zum galaktischen Zentrum hin zunehmen, so verschiebt sich der gravitative Drehpunkt. Je mehr Massen im Zentrum konzentriert werden, desto näher rückt der gravitative Drehpunkt ans galaktische Zentrum; solange, bis er sich im Zentrum der Galaxie befinden würde, wenn alle Massen im Zentrum real vereinigt wären.
Die zentrumsbezogene Rechenweise stellt somit einen Sonderfall dar. Da sich aber in der galaktischen Scheibe die Massen nicht im Zentrum punktförmig konzentrieren, kreisen sie auch letztlich nur visuell und nicht tatsächlich oder gravitativ um das galaktische Zentrum.)
Alle Massen in der Galaxie, vom Rand bis zum Zentrum, bewegen sich visuell auf sogenannten Librationsbahnen. Keine dieser zentrumsbezogenen Bahnen der Massen und deren Umlaufgeschwindigkeiten können zur tatsächlichen Bestimmung der wahren Massen und der realen Kräfteverhältnisse herangezogen werden.



Graphik 9 Die Rasterung der diskreten Massefläche ist hier gut zu erkennen. Der mit dem Pfeil markierte zentrumsnahe Messpunkt M1 wird von den Massen am Rand angezogen mit einer unterschiedlich großen Kraft je Massepunkt (dargestellt durch die farbigen Säulen) Alle anderen Massen heben sich, in Bezug auf M1, gegenseitig in ihrer Anziehungskraft auf, da alle Massen in diesem Beispiel gleichgroß sind. Sie haben keinerlei Auswirkungen auf M1! M1 rotiert visuell auf einer um das Zentrum (schwarzer Punkt im Kreis) führenden kleinen Kreisbahn auf einer sogenannten Librationsbahn (kl. Kreis)

Die sichelförmige Anordnung der auf M1 wirkenden Kräfte in der Graphik 9 entspricht in der Graphik 8 dem sichelförmigen Anziehungsbereich im oberen Teil der Graphik.
Im Innenkreis von M1 befinden sich zwar Massen, da sie aber alle gleichschwer sind, heben sich die jeweils (von M1 aus gesehen) gegenüberliegenden Massen in ihrer gravitativen Wirkung auf. Da es somit keine gravitativ wirkenden Massen in der Nähe von M1 gibt, können diese auch nicht zur Berechnung herangezogen werden.

5. Beispielrechnung für eine galaktische Randmasse (Virialtheorem)

Formeln zur Energieberechnung [5]

$W_{kin} = m \cdot v^2 / 2$

$W_{pot} = m \cdot g \cdot r$

$g = \gamma \cdot M / r^2$

Durch Einsetzen von g in W pot erhält man

$W_{pot} = m \cdot M \cdot \gamma / r$

$F = m1 \cdot M \cdot \gamma / r^2$

Umwandeln nach M

$M = F \cdot r^2 / \gamma \cdot m1$

Einsetzen von M in W_{pot}

$W_{pot} = (m1 \cdot \gamma \cdot (F \cdot r^2 / \gamma \cdot m1)) / r$

$$W_{pot} = \frac{m_1 \cdot \gamma \cdot \frac{F \cdot r^2}{\gamma \cdot m_1}}{r} = F \cdot r$$

W pot stellt in dieser Berechnung die meßpunktbezogene Bindungs-Energie zu der anziehenden Masse in der jeweiligen Entfernung dar.

Anmerkung:
Die integrierte Energie über die gesamte Entfernung wird mit der Formel

$$W_{pot} = m \cdot \int_{r1}^{r2} g \cdot \Delta r$$ [6]

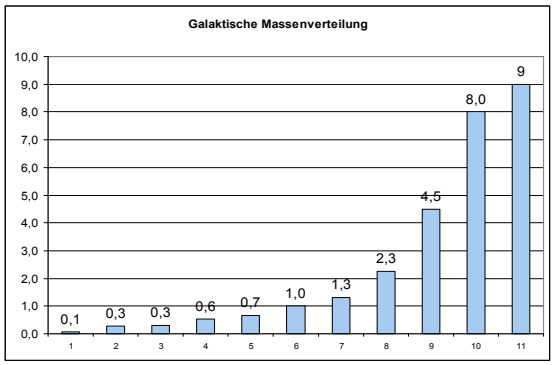
erfasst. Diese Formel kommt aber jetzt hier, bei der Virialtheorem Berechnung nicht zum Einsatz.

Beispielrechnung Virialtheorem

Im System Galaxie – Sonnen können die Energien erst dann berechnet werden, nachdem die galaktischen Basiswerte festgelegt und in ein diskret rechnendes Modell eingegeben wurden. Die Ergebnisse dieses Modells können dann zum Berechnung des Virialtheorems benutzt werden.
Die in die Formeln einzusetzende Werte ($v_{grav.}$, $r_{grav.}$ und m) werden also aus der Excelmodelldatei entnommen.[7]

Festlegungen:
Es soll eine Randmasse (und deren Energie) in der Galaxie berechnet werden. Die Galaxie soll 200 Milliarden Sonnen enthalten, bei einem Durchmesser der Galaxie von 200.000 Lichtjahren. Das Modell ist gerastert und enthält 357 Massepunkte, die einen Abstand von 10.000 Lichtjahren haben.
Die galaktische Durchschnittssonne habe die 0,78 fache Sonnenmasse. Die Massenverteilung in der Galaxie soll dem Leuchtkraft – Massenverhältnis unserer eigenen Milchstrasse entsprechen und wird wie folgt festgelegt.[8]

Graphik 10



Auf der rechten Seite befindet sich das Zentrum der Galaxie mit 9 Masseeinheiten und auf der linken Seite ist der Rand mit 0,1 Masseneinheiten. (Setzt man in das Zentrum den Massenwert 58 statt 9 ein, so liegt die visuelle Umlaufgeschwindigkeit bei konstant 225 km/s für alle Messpunkte (Das Verhältnis der Masse pro Massenpunkt vom Zentrum bis zum Rand beträgt max. 1000 : 1)) Dies entspricht auch der in der Literatur genannten Massenverteilung. [9]

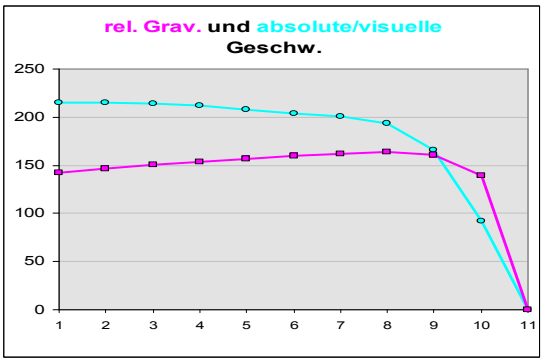
Die Umlaufgeschwindigkeiten in km/s liegen im gravitativen und visuellen Bereich ermittelt durch eine diskrete Berechnung für eine Randmasse dann bei den folgenden Werten.

---

[5] Pysik Formeln und Gesetze, Kuchling 1971 S.74/75
[6] Wie unter 3
[7] Excel Datei „Kogal 710kor. Xls“

[8] Nach Oort, Plaut, 1975(aus räumlicher Verteilung der RR Lyr Veränderlichen abgeleitet)
[9] Oort 1938, Sternzählungen
www.astro.uni-bonn.de /~deboer/galstruc/galst.html

Graphik 11



v vis = 215,5 (km /sek)

Entspricht

v grav = 142,261 (km /sek)
(Wert aus der Exceltabelle)

Die Anzahl der Sonnen pro Messpunkt beträgt:
200.000.000.000 / 357 = 560.224.090
Im Randbereich sind nur ein Zehntel der Sonnen, wie sonst durchschnittlich in der Galaxie vertreten.
Das ergibt dann 56.022.409 Sonnen.
Diese Sonnen einer Randmasse haben eine Gesamtmasse von

$1{,}9903 \cdot 10^{30} \cdot 56.022.409 \cdot 0{,}78 = 8{,}697 \cdot 10^{37}$
Sonnenmasse . Anzahl . Faktor
m = $8{,}697 \cdot 10^{37}$ (kg)
Einsetzen der Werte
10

Achtung : Es darf nicht
v vis = 215,5 (km /sek)
in die Formel eingesetzt werden, nur
v grav = 142,261 (km /sek)
ist der relevante Wert
(Die Dauer eines Umlaufs(visuell und gravitativ) ist gleich, nicht aber die Geschwindigkeit!)

W kin = m . v grav ^{2} / 2 =

$8{,}697 \cdot 10^{37} \cdot 142.300^2 / 2$

W kin = $8{,}8055 \cdot 10^{47}$

W pot = m . (F . r^2/m . γ) . γ / r

F= $2{,}89 \cdot 10^{27}$ (N)
M= M grav = $1{,}9428 \cdot 10^{41}$(kg)
γ = $6{,}67 \cdot 10^{-11}$
r = R 1 grav =$6{,}245 \cdot 10^{20}$ (m)

(Wert aus der Exceltabelle)

Achtung: Es dürfen auch hier nicht die Werte aus der integralen Berechnung genommen werden. Nur die ermittelten Werte aus der diskreten Berechnung sind relevant.

Einsetzen der Werte in
W pot = (m . γ . (F . r ^{2} / γ . m1))/ r = F . r

W pot =($8{,}697 \cdot 10^{37}$.($2{,}89 \cdot 10^{27} \cdot 6{,}245 \cdot 10^{20} \cdot 6{,}245 \cdot 10^{20}$ /($6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 8{,}697 \cdot 10^{37}$)) .$6{,}67 \cdot 10^{-11}$) / $6{,}245 \cdot 10^{20}$

W pot = $18{,}04 \cdot 10^{47}$

Das Verhältnis der beiden Energiewerte (gerundet auf eine Stelle hinter dem Komma) beträgt dann:

$$W_{kin} : W_{pot} = \frac{8{,}8 \cdot 10^{47}}{18{,}04 \cdot 10^{47}} = 1 : 2{,}05 \approx 1 : 2$$

6. Ergebnis

Die Werte entsprechen dem vom Virialsatz geforderten Energie-Verhältnis (eine Toleranz von 2,5% durch die Rasterung bei der diskreten Berechnung ist durchaus vertretbar)

Die visuelle Umlaufgeschwindigkeit der Randmasse beträgt 215 km/sek. Um auf 225 km/s als Umlaufgeschwindigkeit zu kommen, braucht man entweder nur die Zentrumsmasse von 9 auf 58 Masseeinheiten zu erhöhen oder aber alle Massenwerte werden um 22% erhöht. Dies entspricht einem galaktischen Massenzuwachs auf eine mittlere galaktische Sonnenmasse vom Faktor 0,95 irdische Sonnenmasse.

Anmerkung:
Das Verhältnis des gravitativen Massenäquivalents (diskreten Berechnung) zur Summe der galaktischen Massen (Addition der Massenanteile) beträgt:

M grav = $1{,}9428 \cdot 10^{41}$

M addi = $2 \cdot 10^{11} \cdot 0{,}78 \cdot 1{,}9903 \cdot 10^{30}$
M addi = $3{,}12 \cdot 10^{41}$

Das Verhältnis beträgt 0,62 : 1.
Dies ist auch nur folgerichtig, da sich bei der diskreten Berechnung ein Teil der Massen <in Bezug auf M1> gravitativ gegenseitig teilweise aufhebt.

[10] Wie unter 2) S.98 und wie unter 3)

7. Diskussion

Die zur Virialtheoremberechnung benutzten diskret ermittelten Werte führen problemlos zu dem erwarteten Ergebnis.
Die mittlere galaktische Sonnenmasse liegt leicht unter unserer Sonnemasse. Die visuellen Umlaufgeschwindigkeiten der galaktischen Massen liegen bis zu den äußeren Bereichen nahezu konstant bei 215 km/s (225 km/s), was in etwa den Werten in der Realität entspricht.

Eine **diskrete Berechnung**, unter Berücksichtigung der quadratischen Variabilität der Kräfte und unter Berücksichtigung der Kräfteaufhebungen, führt zu konsistenten Ergebnissen. Die Berechnung der gravitativen Kräfte der Wirkmassen und die Bestimmung des gravitativen Radius für die umlaufenden Massen ergeben die erwarteten Umlaufgeschwindigkeiten.

Eine **integrierende Berechnung** durch Zusammenfassung aller Massen im Zentrum der Galaxie ist aus zwei Gründen bei der Gravitationsberechnung nicht möglich:
1. Es wird die quadratische Zunahme der Kräfte nicht berücksichtigt.
2. Es bleiben Kräfteaufhebungen von sich gegenüberliegenden Massen unberücksichtigt.
(In einem anderen physikalischen Bereich ist die integrierende Berechnung der Massen sinnvoll und richtig: zum Beispiel bei der Schwerpunktbestimmung der Massen im Flugzeugbau, also in der Statik)

Zu guter Letzt eine Probe auf die unterschiedlichen Rechenmethoden:
Es folgt ein deutliches Rechenbeispiel zur Massenbestimmung bei Galaxien und bei Kugelsternhaufen über die Umlaufgeschwindigkeit der Sonnen in den jeweiligen Systemen. Bei fernen Galaxien wird diese Methode der Massenbestimmung im Allgemeinen angewandt. Anders nun, als bei den fernen Galaxien, sind im diskret rechnenden Modell auf einem Computer die tatsächlichen Massen bekannt, weil sie so, wie oben im Beispiel vorgeführt, eindeutig festgelegt werden können. So ist es möglich die unterschiedlichen Rechenmethoden einem Test auf Richtigkeit zu unterziehen. Für eine mit gleichschweren Massen bestückte galaktische Fläche errechnen sich, mit den unterschiedlichen Rechenmethoden, die Massenanteile in den unterschiedlichen Kreisringen (Schalen) wie in der letzten jetzt folgenden Graphik veranschaulicht.

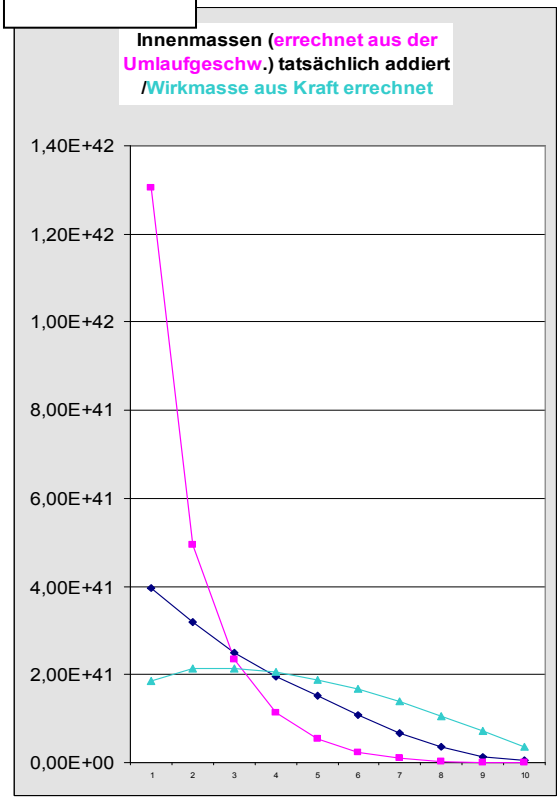
1. Die schwarze Kurve zeigt die Massenzunahme von Messpunkt zu Messpunkt, wenn die Massen je Kreisring (Schale) aufaddiert werden. (Real vorhandene Massen)

2. Die blaue Kurve zeigt die diskrete Massenäquivalenzausrechnung über die Kräfte. Es ist der gravitativ wirksame Massenanteil, der auf die Messpunkte wirkt. (diskrete Berechnung)

3. Die pinkfarbene Kurve zeigt die Massenwerte der anziehenden Massen, errechnet über die visuelle Geschwindigkeit der Messpunkte und ihrem Abstand zum galaktischen Mittelpunkt (Integrale Berechnung) nach der in der Literatur bekannten Formel:

$$M = \frac{v^2 \cdot r}{\gamma}$$ [11]

Graphik 12



Die Aussage dieser Graphik ist folgende:

Die schwarze Kurve gibt die maximale Massenmenge je Kreissegment (Innenmasse)

[11] Sterne und Weltraum 3/2005 S.92 Rechenbeispiel zur Dunklen Materie

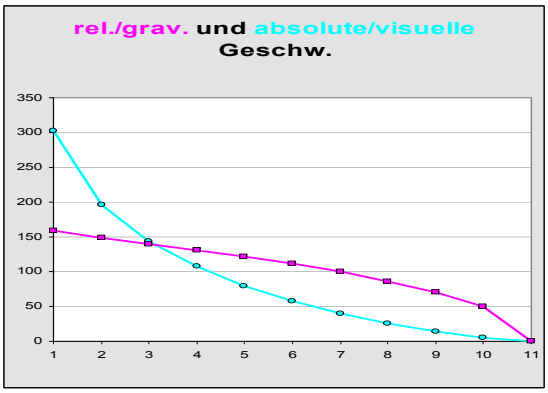
bis hin zum Rand mit max. 4 * 10 ^{41} kg der Gesamtmasse der Fläche vor.

Die blaue Kurve bleibt in jedem Fall unter dieser Marke der maximalen Massenmenge, was auch wegen der gravitativen Kräfteaddition korrekt ist. Um näherungsweise auf die tatsächliche Masse der Fläche (vom Rand aus betrachtet) zu kommen, ist der erhaltene Wert durch den Faktor 0, 5 zu teilen. Diese Faktor ist variabel und ändert sich mit der Verteilung der Massen in der galaktischen Scheibe (Siehe unter Anmerkung auf Seite 12)

Nur die pinkfarbene Kurve geht weit über die maximale, tatsächlich vorhandene Massenmenge hinaus. Es werden mit der integralen Rechenmethode Massen ausgerechnet, die definitiv nicht vorhanden sind. An diesem massendefinierten Modellbeispiel kann, anders als bei weit entfernten Galaxien, deutlich die Fehlerhaftigkeit der integralen Berechnung aufgezeigt werden.

Es wurden mit der integralen Rechenmethode 225 % mehr Massen errechnet als tatsächlich vorgegeben waren.

Die Berechnungsgrundlage war die Massengleichheit über die gesamte gerasterte Fläche, daraus ergeben sich die entsprechenden Geschwindigkeiten und Kräfte,



die aus der Modelldatei entnommen wurden. (Siehe kleine Graphik oben)
Die galaktische Durchschnittssonne lag bei einer irdischen Sonne.

8. Literaturhinweise

Sterne und Weltraum 1/2005 S.44

Der Virialsatz und seine Anwendung, M. Krause 2005

Pysik Formeln und Gesetze, Kuchling 1971 S.74/75

Excel Datei „Kogal 710kor. Xls“ M. Krause 2005/02

Nach Oort, Plaut, 1975(aus räumlicher Verteilung der RR Lyr Veränderlichen abgeleitet)

Oort 1938, Sternzählungen
www.astro.uni-bonn.de /~deboer/galstruc/galst.html

Suw Spezial 2/2004 Das Zentrum der Galaxis S.41

Masso, Eduard 1995; Brayonic Dark Matter; Theory and Experiment
http://www.arxiv.org /astro-ph/pdf9601/9601145.pdf

Sterne und Weltraum 3/2005 S.92 Rechenbeispiel zur Dunklen Materie